昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2001年11月1日発行　第39巻11号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

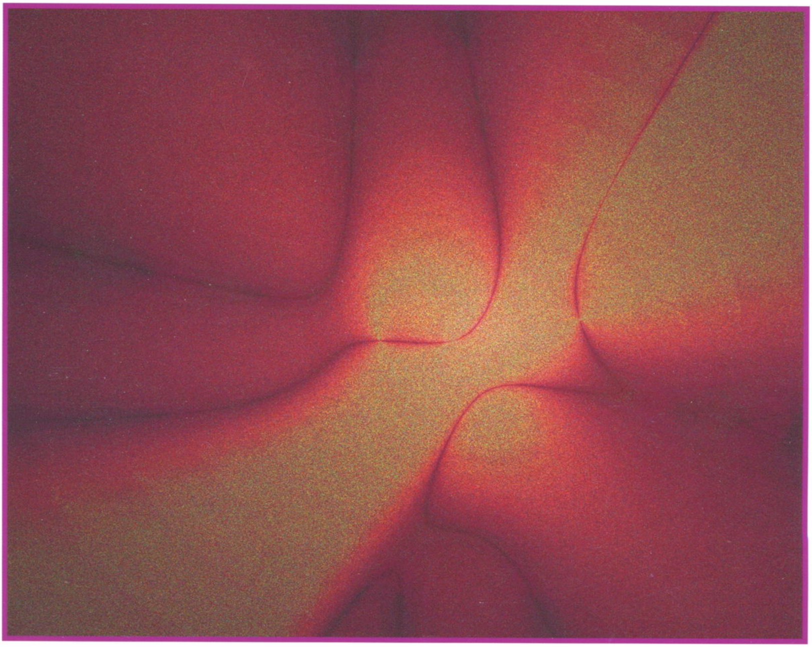
数理科学

11
2001

特集

空間概念と物理学

創造される意味の源泉



No.461

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 461 November 2001

空間概念と物理学

創造される意味の源泉

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．**

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，1年間（本誌＋別冊2冊）14,500円，半年間（本誌のみ）5,500円，半年間（本誌＋別冊1冊）7,250円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～99年/5 省略
1999年/6 ゲノム解析
/7 計算幾何の拡がり
/8 ハミルトン力学系の展開
/9 超離散
/10 複雑系科学の形成
別冊 重力理論
/11 無限と連続
/12 知識情報処理の統計力学的アプローチ
2000年/1 保型関数
/2 双対性（デュアリティ）
/3 生命現象の基本原理
/4 量子論と相対論
別冊 量子カオスの物理と数理
/5 力〈ちから〉
/6 最新 脳のモデルと数理
/7 分子コンピューティング
/8 非線形科学と微分方程式
/9 暗号の数理
/10 脳と心の量子論
別冊 数論の歩み
/11 数理物理における代数解析的方法
/12 20世紀科学革命の基礎
2001年/1 時間とは何か
/2 微分幾何の新世紀
/3 物質とは何か
/4 場の量子論の新たな方向
別冊 量子力学の発展
/5 電磁気学と現代物理学
/6 量子情報と量子コンピュータ
/7 スピンはさらにめぐる
/8 ゲノムサイエンスの新地平
/9 点，粒子，場
/10 ヒッグスの謎
別冊 生命情報科学の拡がり

数理科学臨時別冊一覧

99年/1 量子力学とは何か
99年/9 カオス研究の最前線
99年/11 シュレーディンガー方程式
99年/12 量子コンピュータの基礎
00年/1 有限体と符号理論
00年/2 アルゴリズムの道具箱
00年/3 デリバティブの数理
00年/5 複雑系経済学とその周辺
00年/9 現代暗号とマジックプロトコル
00年/11 差分方程式講義
01年/3 高分子物理の基礎
01年/5 生命をつくる
01年/9 計算物理入門

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
弘栄堂書店（吉祥寺）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
大盛堂（渋谷）
芳林堂（池袋）
リブロ池袋店（池袋）
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
旭屋池袋店
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
友朋堂（つくば）
三省堂名古屋店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂サンパル店（神戸）
ジュンク堂書店（姫路）
ジュンク堂書店（大分）
宮脇書店岡山本店
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿・野田
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学・千葉大学
名古屋大学 北部厚生会館
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂

November 2001 MATHEMATICAL SCIENCES Number 461

特集／空間概念と物理学

空間と物理

創造される意味の源泉

佐藤 文隆

1. はじめに

「空間の中に置かれたある物体の状態が時間的に変化する」. こういうパターンのものの見方が世の中で大勢を占めるようになって久しいように思われる. しかし, これはニュートン力学が社会にもたらした最大の思想改造の一つであって, その歴史はせいぜい三百年であり, 有史以来でみても人類の歴史の十分の一を占めるに過ぎない.

別に「力学」なんて聞いたことがなくても, 近代化した社会は極めてよく力学的見方と整合的である. 歴史的にみれば近代科学を生んだヨーロッパ社会のしくみがこうなって既に二百年の歴史がある. 科学の世界では, 最後まで抵抗していた生命界を, このものの見方に改造していく作業が現在進行中であると言えよう. さらに21世紀初頭のグローバル化の嵐の中で, 空間の中で状態を変化させるものは物体や物体化された生命だけでなく, 情報や貨幣に形式化された「価値」にまで及んできている.

これはこのものの見方がいかに伝搬性, 拡張性において強力であるかを示している. そのため, 社会はなかなかそれを受容してきた時代の中から抜け出せないことを示している. 何れにせよ長年これに浸っていると, 日常化した時間空間というものの見方自身を相対化する知的能力をどんどん減退させる麻薬のような作用を持っているようである. しばしば言われるようにこの特性は人間が他の動物に比べて視覚に長じていることと関係があり, その起源は多分アフリカのサバンナで立ち上がって視界を誇るようになった動物として出発した人間の癖なのかもしれない.

「時間および空間は, 物の単なる規定に過ぎないのか, あるいは物と物との関係なのか. しかしそれにしても空間および時間は, 物自体に属しでもするのか. それとも空間および時間は, 直観の形式にのみいわば付着しているようなものであるのか, したがってまたわれわれの心の主観的性質, 換言すれば, それがなければ時間や空間という述語は, いかなる物にも付け加えられないところの主観的性質に付着しているようなものででもあるのか」(イマヌエル・カント「純粋理性批判」)

ニュートン力学的な時間空間が知的世界に普及した時点でのカントのこの批判的考察に応える科学上の進展はまだない. 脳の科学が寄与するかもしれない. しかし, それに解消できない形而上学をこの問題提起は含んでいる.

2. 二つの空間

物理学の最大の特性は数理的な表現である. そ

こで，頻繁に様々な空間が物理学には登場する．これらを大ナタを振るって二分すれば，

（イ）「対象としての空間」
（ロ）「対象を表現する空間」

に分かれる．後者は様々な対象の状態を数量化して，それら数量を変数の組とする座標空間，数空間，のことである．ここでは，必ずしも専門用語にはないが，これを表現空間と呼んでおく．それに対して前者は物体がそこに位置を占めたり，一般相対論が対象にしたりする時間空間，時空，である．受け取り方によっては，前者（イ）は実在のかかった対象であるが，後者（ロ）は，実在とは無関係で，気楽で自由な空間である．しかし，見方を変えれば，時空でさえも表現空間の一例として実在の位置から“格下げ”することもできる．

表現空間

ニュートン本人がどう思っていたかは別にして，「プリンキピア」の核心は，コスモロジーを解体して，空間を原初的な位置に据え，宇宙をそこで演ぜられる一つのドラマに格下げしたことにある．したがってそこに登場した等質で何者をもその中に包含する空間は，他に実在の根拠を与えるような重い実在性を帯びるようになった．カントはその点を批判的に考察をしたわけだが，多くの自然科学者を含め，現在でも一番通用している空間概念はカント以前のそれである．

しかし，18 世紀，力学自体はすぐに自由な空間概念を導入して，解析力学として発展した．ここで解析力学の特性としては

(1) 変分原理，
(2) 多変数と一般座標変換，

を指す．この内，表現空間の導入は一般座標変換の手法が導いたものである．三体問題など具体的解法に取り組む中で，何時の間にか，配位空間や位相空間といった，高次元の表現空間が導入されていったのである．後述のように変分原理にはむしろ「実在」を掛けた動機が大きかった．

物理学での表現空間の次の拡張は 19 世紀初頭からの熱，電磁気の科学での測定技術の向上である．ここにドイツ語圏での理論物理学の勃興を描いた大部な科学史の本があるが，その本のサブタイトルが「オームからアインシュタインまで」である[1]．多分，「何故オームなのか？」と訝る人もいるだろう．しかし，力学以外の現象の数量的記述を推進したのがオームであり，理論物理学を「自然のマスター」とみなす価値感を育んだ人らしい．「オームの法則」でオームの人物はわからないものである．この数量化された自然の要素を組み立てて自然を構成する手法として空間が重宝がられる．測定技術は数字化，空間化を通して新しい意味を創造したのであった．

時間空間

「スペースがあるから，座席を詰めましょう」と言うときの語感では，空間スペースは「着目したものがない」ということを表現する否定的な意味で用いている．充満が存在で，充満の欠陥が空間という見方である．現在のように，まず何もない空間を描いて，そこに何かを置いていくという発想からするとこうした充満説はいかにも腑に落ちない．しかし，それこそニュートン力学が普及する以前の多くの賢人達の発想には充満説が多数であり，千数百年間それが「腑に落ちた」ものの見方であったことは無視してはならない．

一般相対論や超弦理論を含め，時空の Lagrangian を書くときのイメージには再び充満説が復活している．科学史の話ではよく「特殊相対論はエーテルを排除した」と充満説排除で現代に至っているように述べるが，その後の場の量子論の真空や時空のダイナミクスでは再び一種の充満説が復活してることにふれられていないのは正しくない．

3. 表現空間と座標

n 組の座標変数を空間の一点に対応させた表現空間を考える．変数は（温度，ビール缶の在庫数，弁当の在庫数，……）といった数字の組である．そ

こでの2点の“近さ”は表現される状態の“近さ”であって，幾何的な“近さ”とは違っている．いま変数としては空間の位置を表す座標をとって考えよう．そして，3次元空間内の2質点の状態を表そうとすれば6次元の配位空間 $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6)$ が必要である．2粒子の位置を計量する3次元のゲージ空間の座標を x, y, z とすれば，

$$x^1 = x_1, \quad x^2 = y_1, \quad x^3 = z_1,$$

$$x^4 = x_2, \quad x^5 = y_2, \quad x^6 = z_2$$

となる．下付きの添え字は第一粒子，第二粒子を表す．

これら粒子の間のゲージ空間での距離は

$$l(x^i) = \sqrt{(x^1 - x^4)^2 + (x^2 - x^5)^2 + (x^3 - x^6)^2}$$

であって，この距離は配位空間で表されている状態の表現法の一つなのである．だから配位空間の異なる二点，x と x'，の間の距離

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{6} (x'^i - x^i)^2}$$

とは似て否なるものである．s は表現している「状態」の“近さ”を表す距離になっている．

こういうように表現空間の一点Aが表す「二粒子間の距離」といった物理量は前記の l のように表現空間の幾何的量とは無関係な関数である．状態点Aと状態点Bでの「二点間の距離」の差は

$$\Delta l = l(x^i_{\mathrm{A}}) - l(x^i_{\mathrm{B}})$$

ということになる．

もっともデカルト座標ではなく一般座標を用いることになれば，距離の表現には計量テンソル $g_{ij}(x)$ が必要になる．座標微小な変分 dx^i に対して

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

となる．二点間の距離というのは座標を変えても変わらないものだから，座標を変えればそれに応じて $g_{ij}(x)$ は変換される．

空間の上にいろいろな量がのっていると考える．その量が p 個のスカラー量なら $f^a(x^i), a = 1, \cdots, p$ という関数である．しかし，電場や磁場のような，空間の中での向きに関係している量も存在する．ベクトルやテンソルである．そうなると各点に“向き”に関係した情報を数字で表現するための基準が必要になる．一般には“向き”はのっている空間中での“向き”とは別物である．例えばベクトルは次のように表す．

$$\vec{V}(x) = \sum_{b=1}^{q} v^b(x) \vec{e}_b(x).$$

ここで $\vec{e}_b(x)$ は基底ベクトル，v^b は成分と呼ばれる．成分はスカラー関数の組である．

基底は勝手に配置した既知のものである．「勝手に」とは言っても，多くの場合はこれまた「勝手に」設定した座標系と連携した $\vec{e}_b(x)$ をとる．それが座標基底であり次のような記号が使われる．

$$\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

この表示は座標変換に伴うテンソル成分の変換則を書き下すのに便利である．しかし，基底は本来は座標とは独立なものであって，上のこの連携はあくまで特殊な場合の特殊な一つの表現法だと心しておくべきである．

4. ゲージポテンシャル

基底が空間上で連続的に配置されているなら，近接した二点（座標値の差が Δx^j）での基底ベクトル間の関係を指定するものが登場する．すなわち，変化分 $\Delta \vec{e}_i$ もベクトルだから基底で展開できるはずである．また $\Delta x^j \to 0$ でゼロになるものだから，次のように書ける．

$$\Delta \vec{e}_i = [A^k_{ij} \Delta x^j] \vec{e}_k.$$

このようにして基底の場所による変化はゲージポテンシャル A^k_{ij} で表現できる．

さらに同じベクトル $\vec{V}(x)$ でも基底を替えれば成分も変わる．この変換に応じてゲージポテンシャルもまた変換される．この変換則を導くには空間の各点に付随した内部ベクトル空間というものを

想定するのがいい．そう考えるとこのベクトル空間の基底は必ずしも空間での“向き”に関係した量ではなくてもよくなる．その空間での変換は例えば，

$$\vec{e'}_\alpha = L_\alpha^\beta \vec{e}_\beta$$

のように，空間と無縁な添え字 α である．すると A_{ij}^k は $A_{\alpha\mu}^\beta$ となる．x^μ は空間座標である．一般に変換の作用素を L，その作用を受けるゲージポテンシャルを $\boldsymbol{A}_\mu$ と書くと，変換則は

$$\boldsymbol{A}'_\mu = L^{-1}\boldsymbol{A}_\mu L + L^{-1}\frac{\partial L}{\partial x^\mu}.$$

座標基底では A_{ij}^k はクリストッフェル記号である．上の変換則で L が座標変換なら，右辺の第二項があるために局所的には $\boldsymbol{A}'_\mu = 0$ とできる，すなわち無重力系が常に設定できるのはこのためである．

5. 関数空間

空間にもっているものの情報を表示する一つの方法に，各点に内部空間を設定して，その中にいろんな情報を表示する局所的な方法がある．これに対置されるのが，全体を見渡した大域的な表現法である．具体的には固有関数展開などの方法を指している．したがって，数学の用語での大域的という用法とは違うが，ここではこういう対比をしておく．簡単のためにスカラー関数をある既知関数の組

$$e_1(x),\ \cdots,\ e_n(x),\ \cdots$$

を用いて

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f^i e_i(x)$$

のように展開して，$F(x)$ の情報を

$$f^1,\ \cdots,\ f^n,\ \cdots$$

に置換させてやることである．連続無限個の情報を可付番無限個の情報に“減らせた”だけのようだが，実際には有限後の成分で大略表現できるのが普通である．

この発想は既知の基底ベクトルを持ち込んで，一般のベクトルを成分で表現するのと似ている．何かを表現するには物差し，ゲージ，を持ち込んで数字の組で表す手法である．ここでゲージは勝手に持ち込むものである．一般的に表現するとややこしくなるので式を書くのは止めるが，既知関数の組は規格化，直交化しておく．

以上述べたような導入の仕方は情報処理的である．固有関数論ではある微分方程式を満足する関数 $F(x)$ を対象として，固有関数 $e_i(x)$ もその方程式で決められる．物差しを自由に持ち込む感覚からは程遠い．その代わり，固有関数論では上のような展開が完備 complete であるという御墨付きにこだわっている．勝手な関数を勝手な既知関数の組で展開できるという当てもなく展開する情報処理的発想とは大違いである．

しかしこの証明にこだわるのは20世紀初期の数学の精神である．百年前は根拠や存在にこだわって，実際に解くことを考えなかった．解くことを考えれば n を無限大までとるなどというのは無意味である．解くアルゴリズムを気にするなら n が小さくても十分になるように $e_i(x)$ を選ぶということにこそこだわるべきなのである．空間上の関数の振る舞いは一言では表現できない．それを有限な数の成分 f^i で表現できるなら，情報の客観的な表現になる．情報処理では，根拠よりは，ハンディな方法という有用さに重点を置いている．

歴史的に見れば，固有関数論の動機は振動論という物理の問題にあった．すなわち

$$F(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} f^i(t) e_i(x)$$

と展開したときに，$f^i(t)$ が簡明な方程式，多くの場合は，単振動の方程式に帰着されるという有用さを追求したものであった．線形の微分方程式の場合は，固有関数を物差しとして用いることは各 i 毎に独立な方程式に従うことである．$e_i(x)$ はモード関数とも呼ばれる．

完全に線形でない場合でも，相対的に独立なモードとそれらの間の相互作用という取り扱いが有用

である．この方法が，格子振動から素粒子場までの場の量子論で使われているものである．「○×オン」という疑似粒子はすべてこの方法依存の概念である．この方法の有効性はいかに問題に応じて適切なモード関数を選び出すかの技量に依存している．物理学での多くの仕事はこの範疇に入る．

t も空間座標 x の一つにカウントすれば前記の展開は

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}f^i(y)e_i(x)$$

となる．しかし，単なるラベルである座標に依存した上のような表示には何か固有の意味があるというのは適切な言い方ではない．もっと別な特定の仕方が必要である．これが，部分的に対称性を持つ多様体の問題である[2]．（ここではこの話は省略.）

6. 時空の表現空間

n 個の変数をもつ力学系の運動は次の作用 S の変分原理で与えられる．

$$S=\int\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{X^i}^2-V(X)\right]dt,\ \dot{X^i}\equiv\frac{dX^i}{dt}.$$

ここでポテンシャル V は変数の相互作用を表す項で，変数毎に分離しているなら自己相互作用となる．変分原理から Euler-Lagragian 方程式という運動方程式が導かれる．したがって，作用原理は運動方程式よりは一段上位の原理とみなされる．S 自体は t で積分していることからもわかるように必ずしも t で局所的な微分方程式にばらすことを前提にしていない量である．むしろ，我々は S を運動方程式を経由しないで構成する方法を知らないだけである．

運動方程式と境界条件から軌跡 $X^i(t)$ が決まる．これは n 次元表現空間の中に一本の曲線を決める．曲線は一次元多様体だから，このことを「作用原理は多様体を決める原理である」とみなすことができる．「運動は初期条件で決まる」という言い方は力学の決定論的なイデオロギーを誇張した言い方である．作用原理の「多様体の選択則」という見方を強調するには「決まった両端を結ぶ多様体を決める」という言い方がいい．勿論，運動は位置と速度の初期条件を決めても，両端（二つの時間）での位置を与えてもユニークに決まる．微分方程式は如何にも初期値から時々刻々次の時刻の状態がその前の状態で決まっていく，というイメージを与える．しかしこれは余りにも狭量である．本来，作用原理には「時々刻々決まっていく」というような動的なイメージはない．むしろでき上がっている“歴史”群からの選択則である．

視点をこの一次元多様体上からものを見ることにすると，この一次元多様体上の各点には X^i という n 組の場があるとみなせる．一次元多様体のほうを時空とみなせば X^i のほうは非時空的な量である，という見方になる．一次元空間の場の理論である．場の理論とみると，ケプラー運動などでも V は変数のべき関数等ではなくなるから大変な非線形場の理論となる．そして，ケプラー運動の解はソリトン解のような奇特な厳密解という見方になる．

このように力学系を一次元多様体上の多成分の場の理論とみなすと，場の理論の概念で質点力学を見直すことになる．例えば，X^i がたまたま三次元空間の位置を表す量だということをどういう形で表現するかとなるが，それは場の成分 X^i 相互の間に存在する対称性で表現することになる．それはユーグリッド空間の物理的特性に起源をもつが，この記述形式では場の表現空間に付与された対称性という見方になる．

ここでいったん多様体上から場を見るという視点になれば，多様体上の座標の任意の張り替えに対して不変な形式が求められる．そうすると物理的な変数でもある t を多様体のラベル座標の地位に置くのはふさわしくないとなる．そうすると，上の S よりは次のほうがいい．

$$S=\int L(X,N,X')d\sigma.$$

ここで $X'\equiv\frac{dX}{d\sigma},N\equiv\frac{dt}{d\sigma}$，

$$L = \frac{1}{2}\frac{1}{N}X'^2 - NV.$$

こうしておくと σ の任意の変換

$$\bar{\sigma} = f(\sigma)$$

に対して,

$$\bar{N} = N\left(\frac{df}{d\sigma}\right)^{-1}$$

なる変換を同時にすれば作用積分 S は不変に保たれる. さらに追加的に注意すべきことは, t は N から, 解いた後に

$$t = \int N d\sigma$$

で決まること, また Lagrangian が N を含まないので, それに共役な運動量が保存量となるが, これは Hamiltonian 拘束式を与える. この拘束系のダイナミクスは, 量子力学に行くときに難しい問題を生む.

作用の構成の仕方から言うとこれは「0 次元の質点の世界線で構成される一次元多様体」という見方であるが, これの拡張の一つの方向は「1 次元の紐の世界面で構成される二次元多様体」という見方である. 作用は

$$S = \int L(X^i, N, X'^i)d\sigma_1 d\sigma_2$$

のように二次元多様体上の座標 (σ_1, σ_2) は, 各々, 紐に沿った座標と時間変数に対応したものである. 先の L はいわゆる Lorentz 対称性を満たしておらず, これを考慮すれば

$$L = \sqrt{g}g^{ab}G_{ij}\frac{\partial X^i}{\partial \sigma_a}\frac{\partial X^j}{\partial \sigma_b}$$

のような姿になるが, ユニークではない. また, ここでは t は X^i の中に入れてある. そして, この表現空間 (G_{ij}) を Grassmann 代数の自由度まで含めて拡張すれば超弦理論の Lagrangian になる.

こういう見方でいくと四次元時空の作用は

$$S = \int L \; d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 d\sigma_4$$

となりそうなものである. しかし, 現在の超弦理論の試みはそうはなってはいない. 二次元多様体上の多次元表現空間での振動モードの間の相関として場の相互作用を記述するのである. その意味では我々の四次元時空は再び表現空間に還元される.

7. 表現空間の技術

ここに私にとっては意外さで興味を惹いた本がある[3]. パラパラと頁をめくるとほとんど微分幾何か一般相対論の教科書かと思わすような数式や定理が登場する. 導入部は微分幾何の手際よい入門書としてもよくできた本である. しかし, これは一般相対論や物理学での微分幾何的な手法を述べた本ではない. 題名からわかるようにコンピュータグラフィックス, それも三次元動画のグラフィックスあるいはロボット操作用の数学の本のようである. 動画であるから多様体上の座標をうまく取れるようにモード関数を選ぶ必要がある.

デカルトは形を数学にのるように数値で表現する手法を導入した. グラフィックスはコンピュータで処理される数値情報を形に返してやる技術である. 微分幾何の教科書には最初によく多様体を数空間に対応さす写像 mapping が局所的にのみ可能であるという図がおまじないのように書かれている. この写像の逆の操作を, 頭の中でなく, 現実に可能にする技術が登場しつつあるのだと言える. 「現実」→「空間」→「現実」の中間項の役目を「空間」は果しているようである.

参考文献

1) Jungnickel, C. and McCormmach, R., Intellectual Mastery of Nature: Theoretical Physics from Ohm to Einstein, The University of Chicago Press, (1986).
2) 佐藤文隆, 小玉英雄:「一般相対性理論」第二章, 岩波書店 (1996).
3) Fomenko, A.T. and Kunii, T.L., Topological Modeling for Visualization, Springer (1997).

(さとう・ふみたか, 甲南大学理工学部)

ミンコフスキー空間



松下 泰雄

1. ミンコフスキーと相対論

この小論では「ミンコフスキー空間」について語ってみよう．

ヘルマン・ミンコフスキー（1864–1909）は，帝政ロシア（リトアニア）で生まれ，ベルリンとケーニヒスベルクで学び，またベルリン，ケーニヒスベルク，チューリッヒおよびゲッチンゲンで教えた．チューリッヒでは，アインシュタインもミンコフスキーの講義を聞いていたという．1902 年にゲッチンゲン大学の教授になり，1909 年に 44 才で亡くなるまでゲッチンゲンで過ごした．そこで，ヒルベルトから数理物理を学び，1908 年に，アインシュタインやローレンツたちによる主張が「時間と空間を一体のものとみなす『4 次元連続体』という概念」の下で自然に理解できることを説いた[7]．これがミンコフスキー空間[*1]である．

ミンコフスキーの相対論との関わりは，彼の人生の最後の 7 年間に集約されており，その結果，我々に偉大なる遺産「ミンコフスキー空間」を残していってくれたのである．

ミンコフスキーは，やはり数学者であって，主に整数論を研究の対象としていた．このような研究は相対論とは直接には関連はない．ところが，1983 年のドナルドソンによる 4 次元多様体へのゲージ理論の応用によって，4 次元単連結多様体の「交点形式」の取り得る形を最終的に確定させた仕事（1986 年フィールズ賞）[2,3] において，彼の 2 次式に関する研究は交点形式の分類の基礎たる部分で重要な寄与を果たしていた．

2. ミンコフスキー以前

19 世紀末から 20 世紀へかけての特殊相対論へ至る道は，電子の理論（マックスウェル方程式）と光の速度およびエーテルの解釈の問題であった．科学史を詳しく語ることはとうてい不可能であるが，ミンコフスキー空間に至るまでを，簡単にたどってみたい．

マイケルソン–モーレーの実験（光速が一定の検証）（1881 年から 1929 年まで続く）からエーテルが徐々に否定されてきた．ボイトはドップラー効果を扱っていて，1887 年に現在の係数とは多少異なるが，後のローレンツ変換の原型を提唱している．1889 年に，フィッツジェラルドは，エーテルのなかを物体が運動するときに，物体の長さが収縮しているとすれば，マイケルソン–モーレーの実験は説明がつくと主張した．1892 年に，ローレンツはフィッツジェラルドの論文を知らずに，長さの収縮が起きることを主張した．1898 年に，

*1) 実は，同じヘルマン・ミンコフスキーにちなんだもう 1 つの「ミンコフスキー幾何学」がある．相対論とは異なる「ミンコフスキー幾何学」とは，「有限次元ノルム空間」のことをいう（A.C. Thompson, *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, 1996）．彼は，代数学を研究し，格子や凸体などの幾何学的概念を整数論に導入した．それは，「数の幾何学」として知られている．

ラーマーはいわゆるローレンツ変換を書き下して，フィッツジェラルド–ローレンツ収縮はこの変換の結果として理解できることを示した．ローレンツ自身が，後に名を冠せられる変換を書き下した論文を発表したのは 1899 年である．長さの収縮の他に，「時間」の解釈についてはポアンカレの寄与が大きい．ポアンカレは，固有時間の概念も持っていたし，ほぼ特殊相対論の域に達していたと思われる．最も重要な点は，ポアンカレは，ローレンツ変換を群として認識していたことである．

アインシュタインの有名な特殊相対論の論文は 1905 年に出された[1]．この論文は，いままでの実験を説明するというものではなく，2 つの仮定 (i) 物理法則はすべての慣性系で同一，(ii) 光速一定，からローレンツ変換を導き，フィッツジェラルド–ローレンツ収縮を示し，いわゆる時間のパラドックスをも示した．

このような多くの人々の貢献の後，1908 年にミンコフスキーは，時間と空間を一体のものとみなす 4 次元連続体という概念を提唱した[7]．これがローレンツ計量という不定計量（正，負および 0 にもなり得る計量という意味）を持つ実 4 次元空間であって，本小論のテーマであるミンコフスキー空間である．

3. ミンコフスキー空間

さて，定義を述べよう．ミンコフスキー空間とは，実 4 次元空間 $\boldsymbol{R}^4$ で，指標が $(+---)$ の標準の計量テンソル g_L を持つものをいい，$\boldsymbol{R}^4$ と g_L の対 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ で表す．

$\boldsymbol{R}^4$ のなかの点を「事象」という．$\boldsymbol{R}^4$ にデカルト座標 (x_0, x_1, x_2, x_3) を導入する．g_L は対称行列で，標準という意味は c を定数（光の速さ）として

$$g_L = \begin{bmatrix} c^2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

という形をしていることをいう（空白部分は 0）．

g_L は，任意の 2 つの事象 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$，$y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ に対して，定数 c をともなった内積

$$g_L(x, y) = c^2 x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \qquad (2)$$

を定める．事象 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ に対して

$$\begin{aligned} Q_L(x) &= g_L(x, x) \\ &= c^2(x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

と表す．ここでは，(1), (2) および (3) のいずれをもローレンツ計量と呼ぶことにする．

任意の 2 つの事象 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ と $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ に対して，

$$y - x = (y_0 - x_0, y_0 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

は 4 次元ベクトルである．(3) に関して，ベクトル $y - x$ はまず 3 つに分類される．

- $Q_L(y - x) > 0$ のとき時間的
- $Q_L(y - x) = 0$ のときヌル
- $Q_L(y - x) < 0$ のとき空間的

さらに，最初の 2 つに対して，ベクトル $y - x$ は，$y_0 > x_0$ ならば未来向き，$y_0 < x_0$ ならば過去向きといわれる．このような分類によって，次のような部分集合が定義できる．

$$C^{\pm}[x] = \{y \in \boldsymbol{R}^4 \mid Q_L(y - x) = 0,\ y_0 \gtrless x_0\} \qquad (4)$$

$$I^{\pm}[x] = \{y \in \boldsymbol{R}^4 \mid Q_L(y - x) > 0,\ y_0 \gtrless x_0\} \qquad (5)$$

ここで，$C^+[x]$（$C^-[x]$）は未来（過去）向き光円錐，および $I^+[x]$（$I^-[x]$）は未来（過去）向き時間的領域という．このように，ミンコフスキー空間は各事象においてローレンツ計量による異方性を持っている．このような異方性は，光円錐構造といわれることもある．

ところで，(3) において $Q_L(x) = c^2T^2$（定数）とおいた式

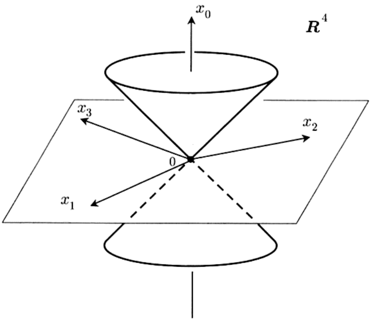


図 1　ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$

$$c^2(x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 = c^2T^2 \tag{6}$$

は双曲面を表す．このことから，(1) のような計量を持つ空間の幾何学は，双曲幾何学といわれる．したがって，ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ によって，相対論は双曲幾何学という土俵に上ってきたのである．

4. 光の速さ c

ローレンツ計量 (1) に現れた定数 c は真空中の光の速さであるが，真空の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 によって $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\,\mu_0}$ で与えられる物理定数である．現在では，c は誤差のない定数

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \tag{7}$$

と定められている．この物理定数 c によって，座標 x_1，x_2，x_3 が長さの単位 m を持てば，座標 x_0 は時間の単位 s を持つことになる．

物理定数 c は，物理単位を持たない数値 $c = 1$ と定義されることがある．すると，(7) より

$$\begin{array}{l} 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} = 1 \\ \qquad\downarrow \\ 1\,\mathrm{s} = 299\,792\,458\,\mathrm{m} \end{array} \tag{8}$$

が得られる．これは，時間の単位 s と長さの単位 m を同じ物理的次元として認識することを意味している．すなわち，$c = 1$ とおくことは，相対論の最も基本的な「時間と空間を一体のものとみなす」考え方を象徴しており，相対論を幾何学に近づける役割を果たしているともいえるであろう．

5. ミンコフスキー空間における三角不等式

3 節において，ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ は，双曲的な計量を持つ双曲幾何学の空間であることをみた．

さて，ある事象 x を選び原点 $(0,0,0,0)$ にとる．まず，x から適当な時間的ベクトルの終点としての事象 y に移動する（$x \to y$）．座標をうまく選べば，$y = (y_0, y_1, 0, 0)$ とすることができる．次に，事象 y から第 3 の事象 $z = (2y_0, 0, 0, 0)$ へ，ベクトル $z - y = (y_0, -y_1, 0, 0)$ に沿って移動する（$y \to z$）．このように，事象 x から y に至り，そこで「道を変えて」y から z に至る移動のときの，(3) による「道のり距離」（双曲的距離）は次のようになる（図 2）．

$$\begin{aligned} \overline{xy} + \overline{yz} &= \sqrt{Q_L(y-x)} + \sqrt{Q_L(z-y)} \\ &= 2\sqrt{c^2(y_0)^2 - (y_1)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

一方，事象 $x = (0,0,0,0)$ から事象 $z = (2y_0, 0, 0, 0)$ に至る 4 次元的道 $x \to z$ に沿っての (3) による「道のり距離」は，

$$\overline{xz} = \sqrt{Q_L(z-x)} = 2cy_0 \tag{10}$$

となる．上の 2 式 (9), (10) から三角形 xyz に対して，次のように不等式が得られる．

$$\overline{xz} > \overline{xy} + \overline{yz}. \tag{11}$$

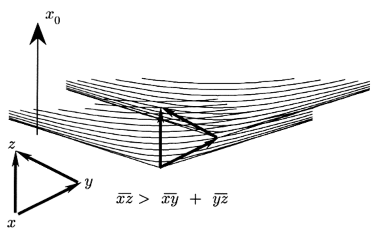


図 2　双曲幾何学における三角不等式

双曲幾何学では双曲的距離によって，三角形の2辺の和 $\overline{xy}+\overline{yz}$ は，他の1辺 $\overline{xz}$ よりも短い．ミンコフスキー空間の双曲的距離はローレンツ計量から与えられる．このような三角形の3辺はすべて時間的ベクトルから構成されている．よって，三角不等式は時間の長さに対する不等式となる．特殊相対論としての解釈をすれば，1つの慣性系における時空の旅行者 $x \to z$ の経過時間は，2つの慣性系を乗り移った旅行者 $x \to y \to z$ の経過時間よりも長い．慣性系を乗り移るということは，加速度を体験することに他ならない．

ここで，よく知られたユークリッド空間における三角不等式を思い出して比較してみよう．図3は，点 x から点 z に至る直線の道 $x \to z$ の距離と，y を経由する折れ線の道 $x \to y \to z$ の距離との比較の様子を表している．直線の道 $x \to z$ のユークリッド距離は，点 x を中心とする等距離線を表す同心円をいくつ横切ったかで測ることができる．一方，折れ線の道は，$x \to y$ のユークリッド距離と，$y \to z$ のユークリッド距離の和である．前者は x を中心とする同心円をいくつ横切ったかで測られ，後者は y を中心とする同心円をいくつ横切ったかで測られる．ここで，3つの道の距離に対してユークリッドの三角不等式が成り立つ．

$$\overline{xz} < \overline{xy} + \overline{yz}. \tag{12}$$

これらの道をすべて等速度で移動したとすれば，折れ線の方は点 y において加速度を体験して道を変えたのである．（図3では，$\overline{xz}$ は等距離同心円を6本横切っているが，$\overline{xy}$ と $\overline{yz}$ はともに5本ずつ横切っている．）

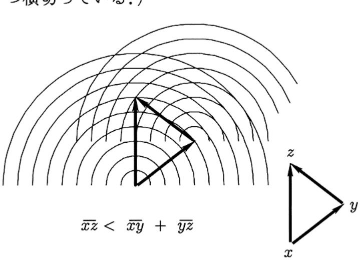


図3　ユークリッド幾何学における三角不等式

またミンコフスキー空間にもどろう．点 x におけるユークリッドの等距離線を表す同心円 $R=\sqrt{(x_0)^2+(x_1)^2}$ （例えば $R=1, 2, 3, \cdots$ ）は，図2の事象 x における1葉双曲線の族

$$cT = \sqrt{c^2(x_0)^2-(x_1)^2} \tag{13}$$

（例えば $T=1,2,3,\cdots$）

に対応する．この1葉双曲線の族は，等時間線を表している．時空の旅行者 $y \to z$ の慣性系に対しては，事象 $y=(y_0, y_1, 0, 0)$ における1葉双曲線の族

$$cT = \sqrt{c^2(x_0-y_0)^2-(x_1-y_1)^2} \tag{14}$$

（例えば $T=1,2,3,\cdots$）

が等時間線を表す．時空旅行者のとる「道」によって，等時間線を横切る数が異なる．時空旅行者の間では，加速度をより多く体験したもののほうが経過時間が短いという現象が起きるのである．これは，双曲幾何学における三角不等式からの帰結である．図2の双曲線の漸近線の傾きは $c=1$ ならば，45° であるが，もし実生活のレベルの速度の運動を考えるとすれば，(7) の c の値から漸近線の傾きはほとんど0となって，ニュートン力学における絶対時間と区別がつかなくなる．そして双曲的三角不等式 (11) は，ほとんど等式になってしまう．双曲的三角不等式によって相対論効果が現れるには，やはり光速に近い運動でなくてはならない．（図2では，$\overline{xz}$ は等時間線を10本横切っているが，$\overline{xy}$ と $\overline{yz}$ はともに4本ずつ横切っている．）

6. 一般相対論の中のミンコフスキー空間

ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ によって，物理の場が双曲幾何学の枠組みのなかで記述できるようになった．すなわち，「物理学は幾何学になった」のである．それによって，また重力場が幾何そのものとして記述できる道を開いて，一般相対論が展開された．

ここで，一般相対論の立場からミンコフスキー

空間を振り返ってみることにしよう．一般相対論は，指標が $(+---)$ のローレンツ計量 g を持つ時空多様体といわれる4次元多様体 $(\mathcal{M}, g)$ を考える．そして，重力場は時空多様体の幾何学そのものとして記述される．すなわち重力場は，計量 g をポテンシャルとし，曲率 R_g を場の強さとして表される．

さて，計量 g を解とする2階双曲型偏微分方程式であるアインシュタイン方程式は次のような形をしている．

$$\textbf{Einstein}\,[g] = \textbf{Matter}\,[\psi]. \qquad (15)$$

この左辺の **Einstein** は曲率にも関係した g に対する2階偏微分作用素を表す．重力以外の物理的な場（ψ と表す）は，すべて時空多様体上の関数，ベクトル場あるいはスピノール場などとして記述される．物理的な場 ψ は，アインシュタイン方程式の右辺に源として現れるが，形式的に $\textbf{Matter}\,[\psi]$ と表した．物理的な場が存在しないときは $\textbf{Matter}\,[\psi] = 0$ で，このときの解 g は真空解といわれる．

ところで，一般相対論において，ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ は最も簡単なアインシュタイン方程式の真空解である．重力場が0，すなわち曲率 $R_g = 0$（平坦）の時空多様体 $\mathcal{M} = \boldsymbol{R}^4$ である．

一般の時空多様体 $\mathcal{M}$ は，各事象 x において一般に曲率 R_g を持つが，それぞれの事象における接ベクトル空間がミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ となっているのである．すなわち，$\mathcal{M}$ の各点にミンコフスキー空間が張りついているのである．式を使えば，$(T_x\mathcal{M}, g(x)) \approx (\boldsymbol{R}^4, g_L)$ $(x \in \mathcal{M})$ のように表される．すなわち，一般相対論において重力場の存在する時空多様体 $\mathcal{M}$ は，その接ベクトル束 $T\mathcal{M}$ が，ミンコフスキー空間をファイバーとするファイバー束[8]という構造をしたものと考えられるようになったのである．

7. 因果律はローレンツ群

1960年代は，相対論の歴史において大きな変革のときで，時空多様体の大域の構造が考えられるようになってきた．ペンローズ–ホーキングの特異点定理も60年代後半に得られ，またペンローズによるツイスター理論も登場した．

その頃，ジーマンは，ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ について数学者の立場から，重要な結果を得ている．その1つは[9]

「因果律はローレンツ群を意味する」 (16)

である．ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ の中の2つの事象 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$，$y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ は，ベクトル $y - x$ が時間的のときに「因果的順序」を定義することができる．すなわち $Q_L(y-x) > 0$ のときに，$x_0 < y_0$ ならば x と y の因果的順序は

$$x < y \qquad (17)$$

であるとする．これは，事象 x から時間的未来向き曲線によって y へ到達可能であることを意味する．もしも $Q_L(y-x) < 0$ ならば，x と y の間に順序は定義されない．したがって，「因果的順序」関係は任意の2つの事象に対するものではなく部分的である．

因果的自己同型とは，自己同型写像 $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ のうち，f と f^{-1} がともに「因果的順序」を保つ写像，すなわち

$$x < y \;\Leftrightarrow\; fx < fy \qquad (18)$$

であるものをいう．このような因果的自己同型の全体がなす群を**因果律群**と呼び，$\mathcal{C}$ と表す．

さて，ローレンツ計量 g_L を不変にする群は擬直交変換群 $O(1,3)$ であるが，4つの連結成分からなる．I_T と I_S をそれぞれ時間反転と空間反転とすると，$O(1,3)$ を連結成分に分割することができる．$G_0 = SO_0(1,3)$（$O(1,3)$ の恒等元の連結成分）として，

$$O(1,3) = G_0 \cup I_S\,G_0 \cup I_T\,G_0 \cup I_T\,I_S\,G_0$$

である．ここで，時間反転は含まないが空間反転は含まれるような部分群を $\mathcal{L} = G_0 \cup I_S\,G_0$ と表す．ジーマンはこの部分群 $\mathcal{L}$ をローレンツ群と呼ぶ．主張 (16) は正確には次のように表される．

$$\mathcal{C} = \mathcal{L} \text{（因果律群 = ローレンツ群）}. \quad (19)$$

この定理は4次元に対して述べられているが，実は3次元以上で成り立つ．因果律群は自己同型写像のなす群であり，一般には必ずしも線形変換とは限らないと思われるが，3次元以上のミンコフスキー空間では，実は線形変換だけしかないことを主張しているのである．ところが，2次元ミンコフスキー空間においては，因果律群 $\mathcal{C}$ は線形写像だけに限られるということはなく，非常に大きな群となる．4次元ミンコフスキー空間のことを説明するために，便宜的に2次元ミンコフスキー空間を使うことが多々あるが，このような決定的な違いを忘れてはならない．

ジーマンは，ミンコフスキー空間についてもう1つ重要な仕事をしている．$\boldsymbol{R}^4$ に対して，ミンコフスキー空間の光円錐構造と適合した開近傍を構成して，開球近傍によるユークリッド位相との違いを明らかにした[10)]．

8. ローレンツ計量以外の可能性 1

4次元における計量の指標には

$(++++)$，$(+---)$，$(++--)$

のように3つの可能性がある．

物理はこれらの指標の中から，ローレンツ指標 $(+---)$ を選び出した．それはなぜだろうか．この指標の選択という問に対して，ある考えをめぐらしてみることにしよう．それによって，ローレンツ指標 $(+---)$ が他の2つの指標と違っていかに特別なものかを見ることができる．

ミンコフスキー空間は平坦な非コンパクト空間であるが，指標の違いだけに注目するという立場をとることにして，コンパクト空間を考えることにしよう．さて，M をコンパクトで向き付けられた4次元多様体として，いずれかの指標の計量を持つものと仮定する．M 上の計量を g と表す．この M がどのようなときに，どの指標の計量を許容できるかということを検討することによって，指標の違いが浮かび上がってくる．

まず，g の指標が正定値 $(++++)$ のとき，g はリーマン計量である．ところで，リーマン計量は任意の M 上に常に存在することが知られている．$(++++)$ の計量が存在するための特別な条件はない．すなわち，M のオイラー特性数に注目すれば，任意の値が存在しうる．

$$\chi[M] \quad \text{(制約なし)}. \qquad (20)$$

ところで，他の2つの指標を持つ計量 g は任意の M に存在できるわけではない．g がローレンツ指標 $(+---)$ の計量，すなわちローレンツ計量のときは，M の位相不変量であるオイラー特性数 $\chi[M]$ が0でなくてはいけない [文献 4), p.190, 8), p.207]．すなわち，

$$\chi[M] = 0. \qquad (21)$$

さて，g が $(++--)$ 指標の計量となるときには，M の満たすべき必要十分条件は既に知られている[6)]．ただし．それをちゃんと述べるためには，さらに多くの準備が必要とされる．しかしながら，必要条件ならば比較的簡単に述べることができる．$\tau[M]$ を M のヒルツェブルフ指標という特性数を表す整数とすれば，g が $(++--)$ 指標の計量となるためには，

$$\chi[M] \pm \tau[M] = 0 \mod 4 \qquad (22)$$

が成り立つことが必要である．すなわち，オイラー数とヒルツェブルフ指標の和と差がともに4の倍数でなくてはならない．（M が4次元単連結多様体ならばこの必要条件は，十分条件でもある[5)]．）

このような事実に基づいて，3つの指標の比較をしてみよう．リーマン計量に対しては制約はなかった．$(++--)$ 指標については条件 (22) が必要であるが，$\chi[M]$ や $\tau[M]$ についてはまだ多くの自由度が残されている．ところが，ローレンツ計量だけは，それが存在するために M のオイラー数 $\chi[M]$ が0でなくてはいけない [⇒ (21)]．これは他の2つの計量の存在と比べて，多様体のトポロジーに対してとても厳しい制約条件である．この厳しさは何を意味しているのだろうか．

さて，オイラー特性数 $\chi[M]$ が 0 になることは，多様体が特異点のないベクトル場を許容することを意味している．すなわち，ローレンツ計量の存在は，多様体に特異点のないベクトル場が存在することを要求している．その他のリーマン計量と $(++--)$-計量を持つ多様体では，オイラー特性数は，0 のときもあり得るが一般には 0 ではない．それは，多様体上にベクトル場を張りめぐらしたときに，どのように工夫して張りめぐらそうとも特異点が発生してしまうことを意味している．

ある指標の計量 g を持つ多様体 M を選択して，その上で「物理」を記述しようと考えたとする．すなわち，物理的な場は，その多様体の上に存在する関数，ベクトル場あるいはスピノールの場であったりする．ベクトル場やスピノール場は，計量の指標に関わりなく定義することが可能な場である．スピノール場は，ベクトル場が存在したうえで構築可能な場である．このような物理の場は，それぞれに対応した「場の方程式」の解としての場を多様体 M 上に与える．このようにして，物理は「場の方程式」を通じて豊かな様相を呈する物理の場をつくりだす．そのような「場の方程式」の解は，しばしば特異点を持つことがある．実際，マックスウェル方程式の解としての点電荷のつくる電場ベクトル場は，点電荷の位置に特異点が現れる．そのとき「場の方程式」によってつくられる特異点は，物理が織りなす作品なのである．場の方程式によっては，もちろん特異点など存在しない場合もある．

ここで，多様体 M にもどってみよう．もし M 上のベクトル場にトポロジーの制約から発生する特異点が存在すれば，「場の方程式」の織りなす解の自由度が大きく損なわれてしまうであろう．もしも，M がトポロジーの制約による特異点から解放されているならば，その上で造られる物理は大いなる自由度をもって振る舞うことができるであろう．したがって，3 つの指標のうち，リーマン計量や $(++--)$-計量を持つ M を物理を記述するための空間として採用したとすれば，一般に M のトポロジーによる不可避的な特異点が存在して

しまう．ところが，g がローレンツ計量であれば，その存在によって M のトポロジーを規制して特異点のないベクトル場が存在し得るのである．ゆえに，(M, g) がローレンツ多様体ならば，安心して物理を構築することができ，かつ様々な「場の方程式」の豊かな解を織りなす自由度が与えられるのである．

4 次元のうち，1 つが時間で，他の 3 つが空間だからローレンツ $(+---)$ なのだという論法とは全く異なる観点から，「物理はローレンツを好む」といってもよさそうな話ではないだろうか．

9. ローレンツ計量以外の可能性 2

物理はローレンツ計量を好むという話はそれなりに正しいことである．しかしながら，物理の多様性はそれだけにはとどまらない．もっと別の観点からは，物理はローレンツ指標 $(+---)$ だけでは収まりそうもないという議論が 1970 年代後半から起こってきた．

そのような中で，場の理論の発散の問題を回避することをねらって，時間 x_0 を虚軸に解析接続 $(x_0 \to ix_0)$ させることによって，ミンコフスキー空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_L)$ からユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_E)$ 上でも物理を考えるようになった．ユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_E)$ 上の非可換ゲージ場のヤン–ミルズ場はインスタントンと名付けられた．さらにユークリッド指標で重力場を表したものが，重力インスタントンである．

ドナルドソンは，ユークリッド指標のゲージ理論を 4 次元コンパクト多様体上で考えることによって，多様体の構造を解析できる道を開いた．ドナルドソン以後，数学ではゲージ理論といえば 4 次元多様体論のことをいうようになったが，その後の発展もとどまるところを知らずサイバーグ–ウィッテン理論へとつながってきている．

さて，$(++--)$-計量の幾何学は，他の指標とは異なる様相を呈しており，大変興味深い．特に，$(++--)$ 指標と物理との関わりについて触れておこう．ソリトン物理あるいは可積分系の物理において，非線形シュレーディンガー方程式や KdV 方程式などが，標準的な $(++--)$-計量を持った $\boldsymbol{R}^4$ 上の自己双対ヤン–ミルズ方程式から導かれることが報告されている．$(++--)$-指標とシンプレクティック構造との関係なども興味深い．また，ツイスター空間上の $(++--)$-指標のエルミート計量は，質量 0 の粒子のスピン（またはヘリシティー）を表していることも思い出す．

3 種類の指標 $(++++)$, $(+---)$, $(++--)$ のそれぞれに物理が存在する．ところで，指標の違いを越えたその先には何があるのだろうか．

振り返ってみるとミンコフスキー空間以来，物理は幾何となり幾何は物理となった 100 年であった．さて，次の 100 年は …

参考文献

1) A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper (On the electrodynamics of moving bodies), *Annalen der Physik* **17**, (1905).
2) S.K. Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, *Journal of Differential Geometry* **18** (1983), 269–316.
3) S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, The geometry of four-manifolds, Clarendon Press, Oxford (1990).
4) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
5) Y. Matsushita, Fields of 2-planes on compact simply-connected smooth 4-manifolds, *Mathematische Annalen* **280** (1988), 687–689.
6) Y. Matsushita, Fields of 2-planes and two kinds of almost complex structures on compact 4-dimensional manifolds, *Mathematische Zeitschrift* **207** (1991), 281–291.
7) H. Minkowski, Space and time (A translation of an address delivered at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians at Cologne, 21 September 1908), in The principle of relativity — A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity —, H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl, Dover, New York (1923).
8) N. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton University Press, Princeton (1951).
9) E.C. Zeeman, Causality implies the Lorentz group, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 490–493.
10) E.C. Zeeman, The topology of Minkowski space, *Topology* **6** (1967), 161–170.

（まつした・やすお，滋賀県立大学工学部）

特集／空間概念と物理学

位相空間

宇宙を包み込むほどに



芹生　正史

思考によってわたしは宇宙をつつむ——パスカル[1)]

1. 幻想としての空間

「空間」というと，太古の人が崖の上から，眼下に広がる自分の土地を満足げに見渡している姿を筆者はつい想像してしまう．場所はエジプトかギリシャ，立っているのは豊かな髭の屈強な部族の長らしいのは，ハリウッドのスペクタクル映画の遠い記憶によるのか．人が風景を見渡したときの広がりの感覚が空間概念の源泉の一つであろう．

「空間」とは，このように大まかに言って「広がり」のことだが，ここで広がりとは何かを分析してみよう．少し吟味してみると，広がりとは，ひとつながりの領域（テリトリー）のイメージがその根底にあることが解る．「ひとつながりの領域」の根源には「近隣」「近さ」の概念がある．結局，「空間」とは，考察する対象を集めた群れに「近さ」の視点を導入することで生まれる，構造の全体のことである．

族長は思う．ここから見渡せる限りの範囲が我々の土地だと．領域（あるいは「近さ」「親しさ」）の原初的なイメージは，私（考察者）を中心とした，同心円状の広がりである．族長のように，自分を中心にして見渡せる範囲はその一例であろう．彼が古代ギリシャ人なら，この領域を「我々のトポス（topos, 場所）」と呼んだことだろう．空間をさす言葉（room）に，個人のテリトリーとしての「部屋」という意味もあるのは示唆的である*1)．領域のイメージとして，自分を取り巻く人間関係，すなわち，両親・兄弟姉妹・親友・親戚筋・知人・同郷人・同時代人 … とだんだん広がっていくと共に親しさが減じていくような「近さ」を想像してもよい．自分と周囲との，近さの微妙な感覚が掴めて，初めて世界の中での自分の「居場所」（トポス）が把握される．

ここまでの議論の中で，領域概念と深く結びついて現れた次の二つの要素に特に注目しよう：

(1)「自分の視点」,
(2)「自分と周囲との関係」.

空間は，考察者が自分を取り巻く世界のありようを理解しようとする衝動からその脳裏に創出するもの，と言えるかもしれない．いわば，空間認識とは，客観的世界を把握するための主観的行為である．同時にこのあたりに「空間」のイメージで世界を把握せざるを得ない知性の罪深さも垣間見ることができる．自分を中心にした「近さ」「親しさ」のランク付けをしないと世界がうまく認識できないのである．それは「我執」と表裏一体である．

さて，ここまででも明らかなように，空間とは，

*1) 数学的な「空間」，あるいは「宇宙」の意味で，英語・仏語では space・espace の語を用いるが，例えば独語では，「部屋」の意味もある Raum が用いられる．

自然界そのものというよりも，自然の姿を把握しようとする我々の側の認識の様式が生み出したイメージである．人間知性の本質は，その空間構成力にあるとすら言える．このことを以下でも忘れないため，次のアフォリズムによって象徴的に表しておこう：

空間とは現実味を帯びた幻想である

空間概念による現実の把握をつきつめれば，理論物理学に行き着く．新世紀を迎えて，理論物理学は新しい段階の進化・深化を熱望している．この機会に空間概念の起源に遡って我々の認識行為の本質を再検討しておくのも意義深いのではなかろうか．

2. 学問の胎動

小さな子供は，ある日突然変なものを集めだす．映画『禁じられた遊び』では，戦時下，機銃掃射で両親を失った女の子が，疎開先の男の子と二人で，村中の十字架を片っ端から収集し始める．一方，平和な時代に育った筆者は，小学校二年生頃の一時期，友人達と牛乳瓶の蓋の収集に熱中したことがある．当時は牛乳といえば瓶入りで，丸い厚紙の蓋がしてあった．会社や牛乳の種類により，実に様々な色や模様の蓋があって面白いのである．研究対象を収集するのは学問の第一歩である．ある程度収集が進むと，これらを種類ごとに分類して整理したくなってくる．データを分類・整理するのは研究の第二歩である．牛乳瓶の蓋も，ビニール袋に雑然と貯められたままではあまり発展性がない．しかしこれらを似たもの同士に分類した途端，いろいろな規則性がはっきり見えてくる．これが学問の始まりである．こうして「牛乳瓶の蓋全体」のなす抽象的な空間が構成され，研究対象になる．

人間の精神には，このように (1) ものを寄せ集め　(2) 集めたものを似たもの同士に分類する，という先天的傾向があるのではなかろうか．言い換えると，ものを集め，「近さ」の尺度でこれを構造化する，つまり「空間」を構成する自発的な傾向が我々にはあるということになる．これが学問への衝動であり，人類の苦悩の始まりでもある．苦悩と言ったのは，これが偏見・差別・先入観の源泉でもあるからである．このようなときはアフォリズムを思い出すのがよい．「近さ」の尺度は絶対的なものでなく，考察者が場面に応じて便宜上導入したものに過ぎない．

集合にさらに「近さ」の尺度が導入された途端，分類・法則の発見・検証 … といった学問が胎動し始める．映画では，十字架集めの遊びは，理不尽な両親の死を何とか納得しようとするプロセスであったことが暗示される．「死の全体のなす空間」を首尾よく構成し，彼女の世界観にうまく組み込むには，少女はさらに何十年と生きなければならない．その取っ掛かりとしてまず「十字架全体の集合」で夢中になって遊んだのである．

身近な例をもとに，空間構成による世界把握の話をしてきたが，今度は，自然科学における実例をいくつか列挙してみる．まず分類に関しては，生物の種の分類，化学反応の分類，素粒子の分類，天文学上の分類（銀河の形態のタイプなど）等々，枚挙に暇がない．理論物理学では，これらの他に，より抽象的な空間も構成する．例えば配位空間，相空間，ヒルベルト空間，リーマン空間，さらに時間と空間の総体を空間として捉えようとするミンコフスキー空間，擬リーマン空間など数々ある．これらのうちのごく一部については第 8 節で述べる．

3. 位相空間の登場

これまで考えてきたことを一般化すると，われわれは，「位相空間」という考えに導かれる．単純化して言うと，

位相空間 ＝ 集合 ＋「近さ」の尺度

と考えてよい．既に見たように，「位相空間」を考え出したもともとの動機は，すこぶる現実的なものであって，科学の方法論の根本に関わるもので

ある．未知の対象を知性のメスで切り込んでいくには，まず考察の対象を明確化し（集合の構成），対象の間に「近さ」を定義して（位相の導入），分類を行っていくのである．

「近さ」の尺度に決まったものはなく，考察者に都合のよいように定義するのである．所詮は幻想ではないか．一つの集合に，複数の「近さ」の定義があってよい．うまい「近さ」を導入すれば自然が鮮やかに把握される．

さて，位相空間の一般的な定義を挙げる[2]．（ここではブルバキ（N. Bourbaki）流の定義を述べる[3]．）「近さ」の尺度の導入は，ある集合の部分集合のうち，どれを「開集合」と呼ぶかを指定することで行われる：

X をある集合とする．X の部分集合のうち，「開集合」と呼ぶものを考察者が指定し，これらを一まとめにしたグループ（開集合族）を組織する．開集合族 $\mathcal{T}$ は，次の諸条件さえ満たせばどう作ってもよい．

(i) 全体集合は開集合；$X \in \mathcal{T}$

(ii) 空集合は開集合；$\phi \in \mathcal{T}$

(iii) 任意個の開集合の合併集合は開集合；$\{O_A\} = \{O_1, O_2, \cdots\} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_A \cup \cdots \in \mathcal{T}$

(iv) 有限個の開集合の共通集合は開集合；$\{O_1, O_2, \cdots, O_N\} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_N \in \mathcal{T}$

このように，集合 X 内に適当な開集合族 $\mathcal{T}$ を指定することを，「X に**位相**（topology）を定める（入れる）」という．そして開集合族 $\mathcal{T}$ が指定された集合 X のことを**位相空間**（topological space）と呼ぶのである．（これを強調して位相空間 $(X, \mathcal{T})$ とも書く．）「位相」の原語 topology は，「場所」を意味するギリシャ語，トポス（topos）に由来する（第1節参照）．近さの概念があって初めて，自分と周囲の位置関係が決まり，自らの居場所が定まる．開集合族（近さの判定基準）を与えることを topology を与えると言い，「位相」（位置のありよう）を定めると訳したのは誠に当を得ている．

ここで位相空間 $(X, \mathcal{T})$ は，考察者が頭の中に生み出した幻想の国ファンタージェン[4]と思うと解りやすい．考察者は，（妙な譬えだが）江戸時代の五人組制度，あるいは戦時中の隣組制度のように，民を組織して慈悲深く統治することを考える．近所の数軒の家を集めて隣組を作らせ，近隣の隣組の集まりを作らせ，それらをさらに束ねて上部組織を作らせ，… という具合にして，各国民一人一人が必ずある隣組，その上部組織，… に属するようにする．もともとただの人々の群れ（「集合」）に過ぎない集まりに，こうして国家組織（「開集合族」）を作り上げると，一定の秩序が生まれ（「位相が導入され」），国家（「位相空間」）としての体裁が整う．「開集合族」とは，集合を**構造化**するために導入する国家組織のようなものである．条件 (i) は，国民の総体が国家組織の最上位組織になっていること，条件 (ii) は，形式的に空集合も組織とみなすこと（委員がいない委員会？），条件 (iii), (iv) は，複数の組織間で，自由に合併したり共通メンバーによる寄り合いを持ってもよろしい，という認可である．これを可能にするべく，「国家組織」には合併，共通化でできるあらゆる可能な寄り合い組織が最初から含めてある．もちろん国家組織の範疇に入らないグループ（「部分集合」）も存在する．例えば，世帯を基本にした隣組制度では，各個人は組織ではない．親の集まりや児童集会も国家組織ではない．そのほかたくさんの「非公認組織」が考えられる．

さて，位相空間の例として，まず両極端な2つの場合を見ておくのがよい．

例1　密着位相（最も粗い位相）

任意の（空でない）集合 X をとり，開集合族として $\mathcal{T} = \{X, \phi\}$ ととると，これは開集合族の公理 (i)–(iv) を満たすので，位相空間になる．

このとき，（空でない）最小の開集合，すなわちこの「国家組織」における末端組織は X である．X の任意の二点 P, Q が最小組織 X に含まれてしまう．いわば，国中のどの二人もいつも隣組の仲

間同士である．開集合族は近さの尺度だと考えると，すべての点が全く同じ近さにあり，べったりくっついたようなイメージになる．密着位相の名の由来だが，これでは，遠い・近いの繊細な判定が全く不可能になるため，最も粗い位相とも呼ばれる．これは言わば，「人類は皆兄弟」位相である．しかし「人類は皆兄弟」というお題目だけでは現実の苦悩の解決にはつながらない．凡夫は，親しさの尺度からくる，家族愛・郷土愛・同朋愛などに翻弄され，世界では異文化間の摩擦が絶えないのが現実の姿である．その一方で，禅寺の雲水などがめざす究極の悟りの境地は，このようなものだという．我執（「自性」）を捨て去り，人類どころか，すべてのものが根本では一つだということを全存在で納得できた瞬間が悟りだという（「無自性の境地」）．我々の言葉でいえば，禅僧達は，命懸けで「位相の入れ直し」に取り組んでいることになる．世界（「集合 X」）が変わるのでなく，考察者の内面（「位相 $\mathcal{T}$」）が変容するのである．

例 2　離散位相（最も細かい位相）

例 1 と同じ集合 X に対し，今度は開集合族として $\mathcal{T}=\{A|A$ は X の部分集合 $\}$ ととる．（これは，X のすべての点および ϕ を開集合とみなすのと同値である．）このとき，$X, \phi \in \mathcal{T}$ であることに注意すると，開集合族の公理 (i)–(iv) を明らかに満たし，新たな位相空間となる．

今度は，(空でない) 最小の開集合 (末端組織) は X の各点になる．点の一つ一つが自己完結しており，他者との共同体意識が全くない．離散位相の名の所以である．任意の部分集合が開集合という意味では，組織なのだが，それは自己内閉鎖的なバラバラの世帯の形式的な集まりでしかない．都市近郊の集合住宅でよく問題となるような状態である．そこには他者との親しさの感覚が皆無で，「自分以外はあかの他人」という心境になる．この意味で「最も細かい位相」とも呼ばれる．自他の区別が強過ぎて，似たもの同士でグループ分けして分類する，という科学的な手法が使えない．しかしながら，このような位相もあることを知っておくのは重要である．先に「苦悩」と言ったが，世の人々はともすれば，安易な類型的視点にとらわれて自らを苦しめている．我々には，年齢・性別・出身地・文化的背景などで人を類型的に理解したがる傾向がないだろうか．世界は日常の我々が思ったよりも深い．一人一人をユニークな個として見る視点も重要である．このような位相のジレンマ――類型的視点（適度に粗い位相）と個性の問題（極端に細かい位相）との相克――に苦悩するのは人類の宿命なのだろうか．

さて，注意深い読者は，開集合族の条件 (iii) と (iv) の間の非対称性が気になると思う．普通の数学書では，当然のこととして詳しく説明していないので蛇足ながら注釈しておく．(iv) において，有限個で止めてあるのは，無限個の開集合の共通部分まで開集合とみなしてしまうと往々にして位相が細かくなり過ぎるためである．実例を見よう．

例 3　(iv) を説明する例

$X=\boldsymbol{R}$（実数全体）とし，通常のように，開区間を開集合とみなした位相が入っているものとする（例 4 参照）．任意の実数 a を取り，a を中心とした幅 $1/n$ の開区間 $O_n=(a-1/n,\ a+1/n)$ $(n=1,2,\cdots)$ と考えると，これは X の開集合である；$\{O_n\}_{n=1,2,\cdots} \subset \mathcal{T}$．もし (iv) のかわりに，無限個の開集合の共通部分も開集合とみなしたとすると，$O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \cap \cdots=\{a\}$ より，$\{a\} \in \mathcal{T}$，つまり任意の一点から成る集合 $\{a\}$ は開集合になる．すると，X の任意の部分集合がすべて開集合になってしまう（部分集合は点の集まりであることと (iii) から）．これは，例 2 の離散位相を意味し，当初の位相と矛盾する．（一方，合併をどれだけ繰り返しても最高組織 X より大きくはなりえないから (iii) では無限個の合併まで許してある．）

集合 X に異なる開集合族 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を指定した場合，二つの位相空間 $(X,\mathcal{T})$ と $(X,\mathcal{T}')$ は，一般には異なる空間になる．（民は同じでも，どういう国家組織のもとに統治するかで国家は全く別もの

になる*2).）しかし，$\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}'$ とが同値な場合（すなわち開集合の指定が全く一致する場合）は，当然同じ空間とみなされる（例 5 参照）．さらに進んで，二つの集合 X と Y をもとに，二つの位相空間 $(X,\mathcal{T})$ と $(Y,\tilde{\mathcal{T}})$ を作ったとき，これらがまず集合として完全に対応づけができ，さらに，開集合同士にも完全な対応づけができる場合がある*3)．これらも位相空間としては同じものとみなす．二つの空間がこのように位相空間として同一視できるとき，それらは互いに**位相同型**（homeomorphic）であるという．第 5 節で触れるが，位相空間には，開集合を介して「連続性」が導入され，これを通して，「形」の概念が生まれてくる．このため，二つの空間が互いに位相同型とは，一方を連続変形で他方に変形できること，つまり，本質的に「形」が同じこと，と解釈することが可能になる．位相空間は，集合を近さの尺度で構造化することで生まれたが，いまやその位相空間同士の間にさえ，近さの尺度を入れようとしていることに気づくだろう．知性と引き換えに背負わされた我々の原罪は深い．

位相同型に近い日常の例をいくつか挙げると，土地とその地図，音楽とその楽譜，『こころ』の漱石による自筆原稿（大正三年）と手元にあるその文庫本（新潮社版 平成 11 年 第 131 刷），名人戦の盤上の局面（柘植の最高級品を使用）と，それをテレビで見ながら研究する，将棋少年の手元の盤面（ボール紙製）などいくらでもある．形に注目すると，広隆寺の国宝弥勒菩薩像と一休みしてタバコを一服する大工さん，エジプトのスフィンクス像と傍らにかしこまる飼い猫などは，それぞれ互いに位相同型と見えなくもない．その他，トポロジー（第 5 節参照）の説明でよく挙げられる位相同型の例としては，コーヒーカップとドーナツの関係がある（カップの取っ手の穴に注意して連続変形してみる）．

さて，我々は近さの尺度という観点から位相を導入したが，ここで実際に位相により近さの判定がどのようになされるかをもう少し詳しく見てみよう．

例えば，位相空間 $(X,\mathcal{T})$ の中の 3 点 P, Q, R を考えよう．P から見たとき，Q と R のどちらが自分（P）により近いかの判定は次のように行える．P を含む開集合全体の中から，適当なものをピックアップして，十分多くの開集合からなる系列 $\mathcal{N}_P=\{U_1=X, U_2, U_3, \cdots, U_n, \cdots\}$ を，$U_1(=X)\supset U_2\supset\cdots\supset U_n\supset\cdots$ となるように選んでおく（P を中心に同心円状に広がる親しさの度合いのイメージ．U_n の添え字 n が大きい程，P にとって親しい人の集まりと解釈できる）．このとき，ある m で，$Q\in U_m$, $R\notin U_m$ となれば，「P にとって，尺度 $\mathcal{N}_P$ のもとで，Q のほうが，R よりも近い」と解釈する．（Q と R を入れ替えた場合も同様.）こうならない場合，すなわち U_m は常に Q,R を両方とも含むか，共に含まないとき，「P にとって，尺度 $\mathcal{N}_P$ のもとで，Q,R は同程度の近さである」と解釈する．このように開集合を利用して近さを判定するので，P を含む開集合を P の近傍，その集まりを P の近傍系ともいう．近傍とは英語では neighborhood というが，つまりは P の「ご近所さん」のことと思っておけば間違いない．

この方法による近さの判定には，幾分すっきりしない点がある．（だからこのような議論は数学の本には普通書かれていない.）それは，尺度 $\mathcal{N}_P$ の選び方には任意性があり，$\mathcal{N}_P$ の選び方を変えると，近さの判定も変わりうる点である．よって常に，「尺度 $\mathcal{N}_P$ のもとでは」という但し書きが必要になる．一点 P においてさえ，尺度 $\mathcal{N}_P$ の取り方がいろいろあるのだから，当然ながら，P の尺度 $\mathcal{N}_P$ と，例えば Q の尺度 $\mathcal{N}_Q$ とには何の関係もない．P にとっては R よりも Q のほうが親しく感じられていても，Q は P よりも R のほうを身近に感じているかもしれない．しかしこれが原初的な近さのイメージである．実際，このような 3 点 P,Q,R の位置関係を巷では「三角関係」と呼んでいる….$\mathcal{N}_P$ に任意性があるのは自然なこ

---

*2) 実際，歴史をひもとけば，このような経験をしてきた地域は世界中にいくらでもある．

*3) 正確に表現すると，適当な 1 対 1 上への写像 $\varphi: X\to Y$ があり，φ と φ^{-1} とが共に連続なとき[2]．

とである．そもそも何を問題にするかで「ご近所さん」の意味は変わってくる．住んでいる場所の意味での近さ，人間関係の親しさ，年収など生活水準の近さ，思想信条の近さ，趣味の近さ，などいろいろな近さの尺度が存在する．次に，$\mathcal{N}_P$ と $\mathcal{N}_Q$ に一般には何の関連もないことは，近さが本来「自分」を中心とした視点であることから当然のことである．

4. 距離空間——位相空間の優等生

位相空間の典型的なタイプとして，距離空間（metric space）があり，理論物理学で用いる空間のほとんどは距離空間か，それを拡張したものになっていると考えてよい．集合 X を用意し，その中の任意の 2 点 P, Q 間の距離 $d(P,Q)$ を定めたとき，これを距離空間と呼ぶ（これをしばしば (X,d) と表す）．ただし，$d(P,Q)$ は次の諸性質（距離の公理）を満たすように与える．

(d1) $d(P,Q) \geq 0$，ただし $d(P,Q)=0 \iff P=Q$ （非負性）

(d2) $d(P,Q)=d(Q,P)$ （対称性）

(d3) $d(P,Q)+d(Q,R) \geq d(P,R)$ （三角不等式）

距離が与えられると，直ちに，点 P から半径 r 以内の点の集まりとしての「球」が定義される；$B_r(P)=\{Q \in X | d(P,Q)<r\}$．これをもとにして，集合 X に位相が入る．すなわち，任意の点 P を中心に，任意の半径 r の球 $B_r(P)$ をすべて開集合とみなし（これは「開球」と呼ばれる），さらに，これらの任意個の合併および有限個の共通部分も開集合とみなすことにする．すると位相の公理 (i)–(iii) が満たされ，(X,d) は位相空間になる．距離空間では，近さの明確な尺度として「距離」があり，前節に述べた，尺度 $\mathcal{N}_P$ の取り方の任意性の問題がない．また (d2) から，お互いに相手の近さは一致する．いわば位相空間の優等生である．ただし，「三角関係」（前節参照）はこの場合もごく普通に生じることに注意したい．近さというのは，このように本来「私」を中心にした視点なのである．

例 4　実数（1 次元ユークリッド空間）

実数 $\boldsymbol{R}$ に自然な距離として

$$d(a,b)=\sqrt{(b-a)^2}=|b-a|$$

を与える*4)．これが距離の公理を満たすことは明らかであろう．こうして $(\boldsymbol{R},d)$ は距離空間になり，このときの開球 $B_r(a)$ は開区間 $(a-r,a+r)$ に他ならない．よって，これから導入される位相は通常の実数の位相である．

例 5　n 次元ユークリッド空間

同様に，n 個の実数の組 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ で表される点の集まりで作られる集合 $\boldsymbol{R}^n$ に，ユークリッドの距離

$$d(P,P')=\sqrt{(x'_1-x_1)^2+\cdots+(x'_n-x_n)^2}$$

を与えると，これは距離の公理を満たしている．((d3) の証明は手頃な演習問題である)．こうして n 次元の開球 $B_r(P)$ が定義され，n 次元ユークリッド空間ができる．また，$d_{(p)}(P,P')=\left(\sum_{i=1}^{n}|x'_i-x_i|^p\right)^{1/p}$ （ただし $1 \leq p$，特に $p=2$ の場合がユークリッドの距離）や，$d_{(\infty)}(P,P')=\sup\{|x'_1-x_1|,\cdots,|x'_n-x_n|\}$ も距離の公理を満たし*5)，$(\boldsymbol{R}^n,d_{(p)})$ （p は $1 \leq p$ または ∞）は距離空間となる（距離空間の 1-パラメータ族をなす）が，これらが互いに位相同型となる（よってどの距離を採用しても位相的性質は同じ）ことも示される[2)]．

5. 連続性とトポロジー

位相空間には**連続性**の概念が生じる．例えば，X と Y を位相空間とし，写像 $f: Y \to X$ が連続とは，（Y の点 Q の行き先は $f(Q)$ であることに注意して）Q の充分近くの点は，やはり $f(Q)$ の充分近くに写像される，ということである．この「充分近く」という性質を開集合を用いて厳密に定

*4)　わざと二通りに表現したのは，高次元への拡張の仕方がいろいろあることを示すためである．

*5)　sup は上限の意味．

式化するのである．すると f の連続性は，「任意の開集合の原像は，やはり開集合である」，という一見「連続」のイメージとはかけ離れたような表現になる．しかし，よく吟味してみると，これがまさしく連続性の正確な記述になっていることがわかる．

今度は，X 内のある点 P から出てまた P に戻ってくる閉曲線が，適当な連続写像 $f : [0,1] \to X$，ただし $f(0) = f(1) = P$ によって表現できることに目を向けてみよう．ここでは「連続」という性質によって，「切れ目がない」という幾何学的な内容が表現されていることに注意する．さらに進んで，このような閉曲線 γ を X 内で連続的に変形して，別の閉曲線 γ' に重ねる操作も「連続性」を用いて記述できる： 連続写像 f があり，$f : [0,1] \times [0,1] \to X$，ただし $f(\cdot,0) = \gamma$，$f(\cdot,1) = \gamma'$ となる．このときは，「切らずに」「変形可能」という二つの内容を総合的に記述するために，二つの変数に関して「連続」という性質が用いられている．X の形の特徴は，この連続変形の操作である程度捉えられる．X に杭のような障害があったり，ドーナツの表面のように「穴」構造があったりすると，閉曲線の連続変形の邪魔となって現れてくる．互いに移りうる閉曲線を分類して調べると，形の特徴が，その中にある曲線の連続変形の障害として捉えられることになる．これが基本群の考え方のエッセンスで，形を研究する，大域的トポロジーの出発点になるものである．

また，取っ手の付いたコーヒーカップを連続変形してドーナツの形にはできるが，野球ボールの形にはできない，というような，「形」の間の性質は，X, Y を二つの形として，$f : X \to Y$ なる連続写像によって X と Y が位相同型であるかどうかということで正確に表現される．大域的トポロジーとは，このように連続変形の障害に着目して，「形」を分類することで「形」の持つ様々な性質を研究する分野である[5]．

開集合の概念が，連続性を経て，幾何学的な姿に次第に発展していく様は誠にスリリングである．我々は，開集合を「近さ」の尺度，あるいは点とその周囲の世界との位置関係（トポス）の基準として導入した．このことから，開集合の概念は幾何学へと発展していく種子を初めから内包していることが納得される．

6. 用語について

ここで，混乱しやすい用語について整理しておこう．我々は，集合に入れる近さの尺度（開集合族）として topology（位相）というものを導入した．そして，その結果できる位相空間という構造は，連続性を通じて，おのずと「形」を持ってくることを見た．このため連続変形で分類できるようなタイプの「形」の諸性質（を研究する学問分野）も topology と呼ぶことが多い．このように topology という語で，二つの異なる（しかし本質ではひとつながりの）ものを指すために誤解が起きやすいが，習慣なので仕方がない*6)．

幸い，日本語では「位相」「トポロジー」と言葉を使い分けるので混乱は少ない．その代わり，別の問題がある．力学系の理論で出てくる phase space も，文字通りに訳して「位相空間」と呼ぶことが多い．このため物理学と数学の両方に関わることを日本人同士で議論するときの苦労は想像以上のものがある．（混乱を避けるため，phase space を「相空間」と訳すこともあり，以下ではこれにならう．）相空間（phase space）は物理学において極めて重要なので，後でもう一度触れたい．

7. コンパクト性

位相空間においてはコンパクトという概念も生まれてくる．これはなかなか理解するのが困難な性質で，初学者を悩ませるものの一つである．まず，本来の定義を述べてみよう．

位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであるとは，A が次の性質を満たす場合をいう：「A 全体

*6) 区別したいときは，前者を point set topology，後者を global topology（大域的トポロジー）などと呼ぶこともある．

を覆いつくす任意の開集合の集まり $\{O_\lambda\}$（無限個でもよい）があるとする．このとき常に，$\{O_\lambda\}$ から**有限個**の開集合 $O_1, O_2, \cdots, O_N$ を上手に選び出し，これらだけで依然として A を覆いつくしているようにできる.」

幸い，X として，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ を考えた場合は，「A はコンパクト $\Longleftrightarrow$ A は有界な閉集合」が成り立つので，これをイメージの手掛かりにすることができる．コンパクトとは本来，こじんまりした，という意味だが，位相空間のコンパクト性は，あまりこの言葉のイメージにとらわれないほうがよい．例えば，$\boldsymbol{R}$ における閉区間 $[a,b]$ は，有界な閉集合だからコンパクトであるが，ここから点をいくつか除いたもの，例えば $(a,b]$, (a,b), $[a,c)\cup(c,b]$ などはコンパクトでない．見た目はいかにも「こじんまり」しているのに，である*7)．「コンパクト」は，抜け穴がない，あるいは，逃げ場がない，というイメージのほうが近い．(特に $\boldsymbol{R}^n$ 内において，この性質を正確に表現すると有界でかつ閉集合ということになるのである.）コンパクト性のイメージを掴むには，次の定理[2] を手掛かりにするのがよいと思う．「距離空間 X においては，A はコンパクト $\Longleftrightarrow$ A は点列コンパクト」A が点列コンパクトとは，A 内の任意の（可算無限個の）点の列 $\{P_n\}_{n=1,2,\cdots}$ に対し，これらの一部を拾い出すことで，(やはり加算無限個の）部分列をうまく作って，常に A 内の点に収束するように必ずできる，ということである．この定理に寄せて，次のような，映画『アルカトラズからの脱出』のようなシーンを思い浮かべてみる．闇に包まれた広場の中を逃げていく脱獄囚（点列）を，サーチライト（開集合）で捉えようとする．広場が四方八方壁で囲まれていてマンホールもない（コンパクト）と，そのうちライトに照らし出されてしまう．しかしどこかに出口がある（コンパクトでない）と，そこから逃げられてしまう*8)．

このイメージなら，「コンパクト化」と呼ばれる手続きもよく納得される．例えば，複素平面（コンパクトでない）に無限遠点 $\{\infty\}$ を形式的に付け加えて2次元球面（これはコンパクト）を構成することがよくある．この操作を「一点コンパクト化」という．複素平面での「逃げ場」になる $\{\infty\}$ を形式的に空間に加えることで，逃げ場をなくしてしまうのである．逆に，2次元球面から一点を除いて穴をあけると，ここが抜け穴になって，コンパクトでなくなる*9)．

8. 物理学における空間の例

第1節で我々の自然認識と空間構成力の関係を述べたが，理論物理学においては，実際にさまざまな空間を自由自在に構成し，自然界を考察する．ここでは，その例として，力学に関係した基本的な空間を二種類挙げるに留める．全体を支配するモチーフは，空間構成を通して，運動を幾何学的に把握しようとする我々の根源的な衝動である．

8.1 配位空間（configuration space）

例えば，3次元ユークリッド空間内の N 個の粒子からなるニュートン力学系を考える．ある時刻 t における，これらの座標を集めて，$(X_1(t), Y_1(t), Z_1(t), \cdots, X_N(t), Y_N(t), Z_N(t))$ と書いてみると，これは $3N$ 次元の抽象的な空間内の一点 $P(t)$ のように見えてくる．空間と見るからには，近さの尺度が要る．これについては，この力学系の運動を幾何学的に定式化しようとする方針から，自然と距離の入れ方が決まってくる（後述)．

ともかくこの例のように，ある力学系の記述に必要な座標 q_i $(i=1,2,\cdots,M)$（M は自由度の数）を全部集めて作った抽象的な M 次元の距離空間*10)をその力学系に対応した**配位空間** (configuration space) と言う．わざわざこのよ

*7) このようなものは，あと一息でコンパクト，という意味でプレコンパクトという（全有界とも呼ばれる)．

*8) 興味ある読者は，上の定理の証明[2] を吟味されると，この比喩が納得されると思う．

*9) 「完備性」の定義をご存知の読者は，ここでのコンパクト性の比喩的な説明と完備性とが関係していることに気づかれるだろう．実際，距離空間では，「コンパクト」と「プレコンパクトかつ完備」とが同値である[2]．

*10) 通常，リーマン空間とみなせるが，ここでは詳細は論じない．

うな抽象的な見方を導入する利点は，もとの空間内の多自由度の複雑な運動を，配位空間内の一点 $P(t)$ の描く曲線の軌跡としてビジュアルに捉えられることに留まらない．さらに重要な点は，配位空間とその中の軌跡を幾何学的な対象として，自由自在に扱える点である．ここで「幾何学」とは，「形」固有の性質という意味で，これを言い換えると，好き勝手な座標を導入して運動を論じてもよい，ということである*11)．

運動法則は，作用関数が決定する．作用関数とは，配位空間内の任意の軌跡曲線 $\mathcal{C}$（普通，両端の点とそこでの時刻は固定しておく）を代入すると値が決まるような実数値関数 $S[\mathcal{C}]$ のことで，これが極値となる軌跡 $\mathcal{C}_0$ が点 $P(t)$ の実際の運動として実現される，というように定式化する（作用原理）[6]．作用関数 $S[\mathcal{C}]$ は，力学系の性質から決まる．（上の例では，ニュートンの運動方程式と同値になる要請から決まる．）通常の力学系では，$S[\mathcal{C}]$ は，軌跡曲線の位置とその接線ベクトルだけに依存するような関数であり，このとき作用原理は，M 個の座標 q_i に対する，t についてのある 2 階の常微分方程式系と同値である．

作用関数 $S[\mathcal{C}]$ は力学の最も基本的な量で，これが配位空間上の軌跡 $\mathcal{C}$（これは幾何学的な対象）の関数として定義されるために，配位空間の距離の入れ方が自然と決まるのである．

こうして，配位空間 $\rightarrow$ その中の軌跡に対する作用関数 $\rightarrow$ その極値としての実際の運動，というようにすべてを幾何学の言葉で記述した．このため前述のように，途中の計算は便利な座標を勝手に選んで行ってよいことが保証される．これが解析力学の精神である*12)．

8.2 相空間（phase space）

古典力学の問題を解くような場合は，配位空間上での計算が便利である．しかし，統計力学や量子力学の理論構成のためには，配位空間の上部構造ともいえる*13)，**相空間**（phase space）での力学の定式化が不可欠になる．相空間を構成する利点は，主として，（保存系に対する）相体積保存則の成立と，力学系に内在する代数構造の明確化の二点にある．

配位空間による定式化では，適当に導入した M 個の座標変数 q_i に対する，（時間についての）2 階常微分方程式系で記述されることを述べた．これを 1 階の微分方程式系に表現し直すことを考える．そこで，「速度」$v_i = \dot{q}_i$ も座標に加えて，$(q_1, \cdots, q_M; v_1, \cdots, v_M)$ と書いてみると，これは，ある $2M$ 次元空間内の点であり，時間パラメーター t を介して，この点が軌跡曲線 $\mathcal{C}'$ を描くとみなせる．すると，作用関数 $S[q_i, v_i]$ は，この空間内の軌跡 $\mathcal{C}'$ の位置だけで値が決まるものとなる．こうして，空間の次元を倍に増やし，基本変数を $2M$ 個にした代償と引き換えに，時間についての 1 階の常微分方程式系で運動が表現し直せる．

以上が基本的アイデアだが，実際には，$v_i = \dot{q}_i$ そのものよりもむしろ，その微小変化に対する作用関数 $S[q, \dot{q}]$ の応答，$p_i(t) = \delta S[q, \dot{q}]/\delta \dot{q}_i(t)$（$q_i$ に対する正準運動量）を基本変数に選んだほうがよい．単に v_i を導入したのでは，v_i と $\dot{q}_i$ とが実は等しい，という条件をさらに付加する必要があり，定式化としてはぎこちなくなる．一方，上のような変数の取り方をすると，これに相当する条件（p_i と $\dot{q}_i$ との関係）が，作用原理（もしくはこれと同値な運動方程式）によって自動的に考慮されるのである．こうして作った，$(q_1, \cdots, q_M; p_1, \cdots, p_M)$ がなす $2M$ 次元の空間が相空間である．相空間上の点（状態点）の軌跡として力学を定式化したものを力学の正準形式（canonical form）という．このとき運動方程式（**正準運動方程式**）は，$2M$ 個の変数 (q_i, p_i) に対する，時間についての 1 階の常微分方程式になる．

相空間はやはり幾何学的対象となり，任意の

*11） 幾何学は，「形」としての固有の性質を研究する．実際は，座標系を導入した方が議論しやすいことも多いが，最終的に意味を持つのは，座標の取り方によらない，形自身の性質である（例「三角形の内角の和は 180 度」）．逆にいうと，幾何学的性質のみを問題にする限り，途中の計算では便利なように座標系を導入しても構わない，ということになる．

*12） このため，幾何力学と呼びたいくらいである．

*13） 実際，相空間は配位空間上の余接バンドル（cotangent bundle）という構造とみなすことができる[7]．

座標系で記述することができる*14)．しかし，上のように作った変数のペア (q_i, p_i) による座標（正準座標）によって運動方程式を記述するのが最も簡潔になる．そこで，正準運動方程式の型を変えない座標系に限定する*15)のが便利で，このように制限した座標変換 $(q_i, p_i) \mapsto (Q_i, P_i)$ を**正準変換**という．配位空間における座標変換 $q_i \mapsto Q_i = f_i(q_1, \cdots, q_M)$ も，(これと連動して正準運動量も $p_i(t) = \delta S[q, \dot{q}]/\delta \dot{q}_i(t)$ に基づいて正しく変換させれば) 正準変換とみなせる．よって相空間上では変換のヴァリエーションが大幅に増えている (q と p を混ぜる変換が可能になったことに注意．これは変数を倍にしたのだから当然だが)．

さて，相空間上の体積要素 $dq_1 \cdots dq_n\, dp_1 \cdots dp_n$ は，全エネルギーが保存される力学系の運動のもとでは，時間的に一定になることが示される（リューヴィル（Liouville）の定理)[6]．この性質のおかげで，相空間内の等エネルギー面（全エネルギーが E である状態点全体がなす領域）の任意の部分領域に，その相体積に比例した確率分布を付与できる（こうしても確率の保存と矛盾しない)．これが統計力学の基礎になる．

また，与えられた力学系に対し，これに関係するすべての物理量のなすベクトル空間を考えると，これにはポアッソン括弧 (Poisson bracket) *16)による代数構造が入る．これと同じ代数構造を持つ線形演算子の交換子代数をつくり，それに表現*17)を与えることを**正準量子化**と呼ぶ．物理量に対応したこれら線形演算子の作用する相手として，今度はヒルベルト空間（Hilbert space）と呼ばれる，(一般には無次元の）ノルム空間（ベクトルの長さを適当に与えることで，ベクトル空間を距離空間化したもの）を構成する*18)．このように相空間による力学の定式化（正準形式）は量子化への不可欠なステップになる．

9. 空間の空間

空間の構成は，自然科学の方法論の根本に関わると第3節で述べたが，筆者自身が実際に理論構成に応用した例をごく簡単に紹介させて頂いて結びとしたい．

時空構造を議論する時空物理学や，宇宙の歴史を考察する宇宙論においては，一般に宇宙と呼ぶ，空間が扱われる*19)．実際の我々の宇宙空間は，唯一無二の存在かもしれないが，これを理論的に考察するには，どうしても二つ以上の空間（「宇宙」）を一度に扱う必要が出てくる．

例えば，宇宙論という行為そのものがそうである．現実の宇宙自体はあまりに複雑なので，これを認識するには，現実の宇宙の極端な単純化たる宇宙モデルに頼らざるを得ない．この時点で既に，現実・モデルという二つの宇宙が関与している．これら二つの関係は単純ではなく，現実の宇宙の歴史（時間発展）と，宇宙モデルのそれとの関係はなおさら自明ではない．ところがまさに宇宙論ではこれが問題になる．両者の関係を詳しく分析するには，二つの空間の「形の近さ」の尺度が必要になる．しかし「形の近さ」を記述するのが容易なことではないのは明らかであろう．

別の例として，空間 R が，種々雑多な大きさの，複雑微小な下部構造（例えば，トポロジーでいうハンドル）を持つ場合を考える．あるエネルギー

---

*14) 幾何学的観点を特に強調したいとき，相空間のことをシンプレクティック多様体 (symplectic manifold) とも呼ぶ[6,7]．

*15) 後の註でも述べるように，正準変換を「ポアッソン括弧を不変にする変換」と定義することもでき，実はこちらの定義の方が明快である．なお，正準変換の幾何学的な意味づけについては文献 7) を見よ．

*16) 相空間上で定義された物理量 A, B に対し，

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}$$

で決まる物理量を対応させる反対称双線形演算子 $\{\ ,\ \}$ を，ポアッソン括弧と呼ぶ[6]．正準変換のもとではポアッソン括弧は不変，すなわち $\{A, B\}$ をどの正準座標で計算しても値は同じという著しい特徴がある．むしろこれを正準変換の定義とすることもある．

*17) この「表現」という用語についてはここでは深入りしない．文献 8) などを参照．

*18) 厳密には，確率解釈をするために，これをさらに射影空間にする．

*19) ここでは，「宇宙」とは (4 次元) 時空の (3 次元) 空間的の切り口の意味で使っている．

スケール E で空間 R を観測したとすると，E に対応したスケール以下の下部構造は実質上，ならされて見えないはずである．こうして「実質上の空間」R_E が得られる．観測エネルギーを段々低くしていくと，実質上の空間 R_E は，E の「関数」として次第に変化し，段々単純になっていく．このとき，空間構造の系列 $\{R_E\}$ は，物理学に即した「幾何構造の近似操作」を表現していると考えられる．$\{R_E\}$ は，直観的には「似た空間」でできた系列なのだが，これらが「似ている」ということを数学的に定式化するのは極めて難しい．そこには，トポロジー（大域的性質）とスケール（局所的性質）が複雑に関与している．言い換えるとこのような現象を語る「言葉」が整備されていないのである．

二つの空間や，空間の系列の間の比較が問題になるならば，いっそのこと，空間全体を集めた集合をつくり，そこに近さの尺度を入れたほうがすっきりする．いわば「空間達のなす空間」を作ってしまうのである*20)．牛乳瓶の蓋集めに熱中した身にとっては，ごく自然な衝動である．

さて「近さ」の入れ方だが，「太鼓の形が違えば（似ていれば）音が違う（似ている）」[11] という，極めて素朴なアイデアを利用する．詳細は一切省くが，二つの空間が与えられたとき，象徴的に言うと，それらの音の成分（スペクトル，すなわち固有振動数）をうまく比較することで，空間の「形の近さ」を定式化することができる[9]．スペクトルは，大域的性質と局所的性質を結びつけた，理想的な量なのである．ありがたいことに，こうしてつくった「空間の空間」，つまり空間全体の集合に，スペクトルによる近さの尺度を与えたものが，（位相空間の優等生たる）距離空間になることが示される[10]．このため，「空間の空間」は性質がよく，例えばこの上に積分を定義したりもできる．得体の知れない巨大な集合に，距離空間の構造を見出したときの安心感は，溺れかけた人が突然足が付くことに気づいたときの安堵の気持ちに似ているかも知れない．未知の数学的対象に既知の構造を見出す，というのは，それほど重要なことなのである．「空間の空間」の中においては，二つ以上の空間の「形」の関係を心置きなく議論できる．この意味で強力な「言葉」を我々は得たことになる．さらに面白いことに，ここで展開したような，スペクトルによる形の特徴づけは，新しい空間概念に我々を導いてゆく．それは，どのようなスケールで空間を眺めるか（「実質上の空間」の例を参照），どのような「観測装置」で空間の形を調べるか，によって形の様子がおのずと変化するような空間観である*21)．

人間知性は，宇宙はおろか，宇宙達のなす空間さえ包み込むほどに大きなもののようである．

*20) 厳密に言うと，ここでは，コンパクトかつ境界のないリーマン多様体の全体を考える．

*21) 理論物理学の観点からも近年注目され出した，いわゆる「非可換幾何学」も，基本のアイデアはこれと通じるところが多い．このような空間観が今後ますます重要になるように筆者などは感じる．

参考文献

1) パスカル（B. Pascal）『パンセ』（由木康 訳，白水社，1990 年），断章第 348（ブランシェヴィック版による）．
2) 位相空間についての最近の優れた教科書としては，例えば，矢野公一『距離空間と位相構造』（共立出版，1997 年）．
3) N. Bourbaki, "General Topology" (Addison-Wesley 1966).
4) エンデ（M. Ende）『はてしない物語』（上田真而子・佐藤真理子訳，岩波書店，1982 年）．
5) 例えば，瀬山士郎『トポロジー：柔かい幾何学』（日本評論社）．
6) 解析力学の代表的教科書としては，例えば，ゴールドスタイン（H. Goldstein）『新版 古典力学』（瀬川富士・矢野 忠・江沢康生訳，吉岡書店，1983 年）；ランダウ（E.D. Landau），リフシッツ（E.M. Lifshitz）『力学』（広重 徹・水戸 巌訳，東京図書，1974 年）．
7) アーノルド（V.I. Arnold）『古典力学の数学的方法』（安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄訳，岩波書店，1980 年）第 8 章，第 9 章；R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu, "Manifold, Tensor, Analysis, and Applications" (2nd ed.) (Springer 1988), Chapter 8.
8) 山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』（培風館）．
9) M. Seriu, *Phys. Rev.* D**53**, p.6902 (1996).
10) M. Seriu, *Comm. Math. Phys.* **209**, p.393 (2000).
11) M. Kac, *Am. Math. Mon.* **73**(4), p.1 (1966).

（せりう・まさふみ，福井大学工学部）

計量擬似接続空間



河合　俊治

計量擬似接続空間とは，計量と擬似接続を備えた可微分多様体のことである．よく知られている Euclid 空間，Minkowski 空間，Riemann 空間は，全て計量擬似接続空間の一種とみなされる．

本稿の目的は，この空間を物理学（主として重力理論）との関わりにおいて考察することにある．

1. 可微分多様体，計量

アフィン空間は自然な仕方で Hausdorff 空間になる．n 次元可微分多様体は，その各点が n 次元実アフィン空間 R^n の開集合と同相な近傍をもつ Hausdorff 空間であって，さらにその可微分性の程度に応じて，n 次元 C^r 級可微分多様体あるいは解析的多様体と呼ばれる．ここに，$r = 1, 2, \cdots, \infty$ である．R^n は非コンパクトな n 次元解析的多様体である．

物理学においては，実用上は，C^∞ 級可微分性を必要としない場合が多いが，「必要回数可微分」であることを保障しておいたほうが議論し易いこともあって，C^∞ 級可微分多様体を考えることが多い．C^∞ 級可微分多様体においては，C^∞ 級の，写像，テンソル場，微分形式とその外微分が定義される．さらに向き付け可能な可微分多様体の上では，微分形式の積分が定義され，一般化された Stokes の定理が成り立つ．以下では，単に「多様体」といえば，C^∞ 級可微分多様体のことを指し，特に断らない場合は，写像，曲線，テンソル場は全て C^∞ 級であるものとする．

多様体は，「滑らかな曲面の概念を一般化したもの」であって，向き付け可能な多様体は，「その上で微分積分学を展開できる空間」である．物理学の基礎法則は殆ど微分積分学を用いて定式化されてきた．向き付け可能な多様体は物理学の基礎に据わっている．Newton 力学をはじめとして，物理学においては，単なる多様体でなく，さらに計量が定義されている空間が前提とされている場合が多い．

定義 1　n 次元多様体 M において，2 階対称共変テンソル場 g が存在して，M の各点 x における値 g_x が接ベクトル空間 $T_x(M)$ の符号数 $(a, b), (a + b = n)$ の計量テンソルであるとき，g を M の符号数 (a, b) の計量テンソル場という．特に $(a, b) = (0, n)$ の場合，$(a, b) = (1, n-1)$ の場合の g をそれぞれ Riemann 計量，Lorentz 計量といい，このとき M のことを，それぞれ Riemann 多様体および Lorentz 多様体という．

Newton 力学や Maxwell の電磁気学，非相対論的量子力学は，「物理的空間は向き付けられた 3 次元 Euclid 空間であり，物理的な時間は向き付けられた 1 次元の Euclid 空間である」ことを前提としている．また特殊相対論で前提とされる Minkowski 空間（時空）は，Lorentz 計量[*1)]が定

*1)　通例，この場合については，Lorentz 計量のことを Minkowski 計量という．

義されており，多様体としても，また時間的にも向き付けられている 4 次元実アフィン空間である．ここでは時間と空間は別々の存在ではなく，それらが合わさって 4 次元空間を作っている．この時空概念は，「古典電磁気学の理論的整備」が契機となって導入された．Einstein は，Maxwell の電磁気学の中に Minkowski 時空を読みとったのである．

重力の基本的特質は，それが「万有」であり，慣性質量と重力質量の等価性が成り立つことにある．これは，重力を時空構造に帰着させ得る根源でもある．一般相対論における時空は，Lorentz 計量と Levi-Civita の接続の定義された 4 次元多様体であることが前提とされている．これは，「重力理論の整備」が契機となってなされたのであった．

時間–空間（時空）は，全ての物理現象が生起する「舞台」であるから，時空概念の変革は全ての物理学の変革をも伴うこととなる．

上記の諸理論に登場する空間は，何れも，単なる「多様体」以上の豊富な構造をもつ計量擬似接続空間の一種である．以下では，まず，この空間の数学的事項について述べる．その過程で，この空間概念が素粒子のゲージ理論における概念と密接な対応関係にあることも明確になる．

2. 主ファイバー束とその接続

一般相対論における Levi-Civita の接続係数—Christoffel 記号で表される—および素粒子のゲージ理論に現れるゲージポテンシャルは共に，主ファイバー束の接続の接続係数である．以下，主ファイバー束とその接続等に関する基礎的事項を概観しておく[1]．

2.1 主ファイバー束，束準同型，部分束，同伴束

定義 2 M, P を多様体，G を Lie 群とする．次の条件を満足する系 $\mathcal{P}=\{P,M,G\}$ を M 上の G を構造群とする主ファイバー束，あるいは単に主束という：

(1) G の元 a に対応して P から P の上への微分同型写像 R_a が定まって，$R_a(u)=u{\cdot}a, R_{ab}=R_b\circ R_a$ であって，ある $u_0\in P$ に対して $R_a(u_0)=u_0$ であるならば，$a=e$ である．なお，e は G の単位元を表す．

(2) P から M の上への写像 π が存在して，$\pi(u)=\pi(v), u,v\in P$ であるのは，G のある元 a が存在して，$u=v\cdot a$ であるとき，かつそのときに限る．

(3) A を添数集合として，M の開被覆 $\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ であって次の条件を満足するものが存在する：微分同型写像

$$u\in\pi^{-1}(U_\alpha)\to(\pi(u),\varphi_\alpha(u))\in U_\alpha\times G$$

が存在して，

$$\varphi_\alpha(u\cdot a)=\varphi_\alpha(u)a, \forall u\in\pi^{-1}(U_\alpha), \forall a\in G$$

である．

各 “部品” の名称は，M：底空間，π：射影，U_α：座標近傍，P：束空間，G：構造群，標準ファイバー，R_a：G の元 a による右移動，である．

$x\in M$ に対して, $x=\pi(u)$ であるような $u\in P$ をとると，

$$\pi^{-1}(x)=\{u\cdot a|a\in G\}$$

である．$\pi^{-1}(x)$ のことを x の上のファイバーという．各ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は G と微分同型である．P は M の開集合 U_α と G との直積に微分同型な開集合 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ の族 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)|\alpha\in A\}$ で被覆される．

束空間 P は，「“短冊” $\pi^{-1}(U_\alpha), \alpha\in A$ をその重なりの部分 $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)\neq\emptyset$ で，G の元の作用に従って “張り合わせた” もの」である．底空間 M の各点 x の上にはファイバー $\pi^{-1}(x)$ が “1 本 1 本植え込まれている”．

$\mathcal{P}$ において，M の開集合 U から P への写像 $\sigma: U\to P$ が，条件 $\pi(\sigma(x))=x, \forall x\in U$ を満足するとき，σ を局所断面という．また，主束 $\mathcal{P}'=\{P',M',G'\}$ と $\mathcal{P}=\{P,M,G\}$ と，Lie 群 G' から G の中への準同型写像 φ がある場合には，束準同型写像 $f: P'\to P$ が定義される．特に，$M'=M$ であり，φ が，G' から G への包含

写像であって，かつ M の恒等写像を誘起するような束準同型写像 $f: P' \to P$ が存在するとき，「$\mathcal{P}'$ は，$\mathcal{P}$ の部分束である」という．

また，φ が G' から G の上への同型写像であって，$f: P' \to P$ が微分同型写像であるような束準同型写像 f が存在するとき，「$\mathcal{P}'$ と $\mathcal{P}$ とは束同型である」という．

主束 $\mathcal{P} = \{P, M, G\}$ および G が左 Lie 変換群として作用する多様体 F が与えられていると，F を標準ファイバーとするファイバー束 $\mathcal{E} = \{E, M, F\}$ であって主束 $\mathcal{P}$ の同伴束と呼ばれるものが，同値を除いて一意的に定まる．大雑把に言えば，「$\mathcal{E} = \{E, M, F\}$ は，$\mathcal{P} = \{P, M, G\}$ の "構造" を保ったまま，そこにおける標準ファイバー G を F に置き換えたもの」である．

2.2 主束における接続，接続の写像

主束 $\mathcal{P} = \{P, M, G\}$ を考える．P の各点 p において，P における接ベクトル空間 $T_p(P)$ の水平部分接空間 H_p を指定することによって，$\mathcal{P}$ における接続 Γ が定義される．

接続 Γ を与えることは，接続形式と呼ばれる P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1–形式 ω を与えることと同等であり，さらには $\mathcal{P}$ における平行移動を与えることと同等である．ここに，$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環を表す．

定理 1　主束 $\mathcal{P}$ の底空間 M が位相空間として可算基をもつならば，$\mathcal{P}$ は接続をもつ．

主束 $\mathcal{P}'$ から主束 $\mathcal{P}$ への束準同型写像 f が存在して，$\mathcal{P}', \mathcal{P}$，それぞれに接続 Γ', Γ が与えられていて，P' の各点 p' での水平部分空間が，$f(p')$ での水平部分空間の中へ f の微分により写されるとき，「f は，Γ' を Γ に写す」という．

2.3 曲率形式，接続係数

定義 3　接続形式 ω の外共変微分 $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} D\omega$ のことを ω の曲率形式という．

$\sigma: U \to P$ を $\mathcal{P}$ の局所断面，$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を U で定義された M の局所座標系とする．ω, Ω の σ による U への引き戻し $\sigma^*\omega, \sigma^*\Omega$ を，

$$\sigma^*\omega = A^a{}_\mu E_a dx^\mu \ , \quad (a = 1, 2, \cdots, m) \, ,$$

$$\sigma^*\Omega = \frac{1}{2} F^a{}_{\mu\nu} E_a dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と表すと，

$$F^a{}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A^a{}_{\nu]} + C^a{}_{bc} A^b{}_\mu A^c{}_\nu$$

である．ただし，$C^a{}_{bc}$ は，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{E_1, E_2, \cdots, E_m\}$ に関する構造定数である．また，

$$2\partial_{[\mu} A^a{}_{\nu]} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu$$

である．$A^a{}_\mu, F^a{}_{\mu\nu}$ を，それぞれ接続係数，曲率テンソルという．

2.4 同伴束における接続，平行性，共変微分

主束 $\mathcal{P} = \{P, M, G\}$ の接続が与えられると，その同伴束 $\mathcal{E} = \{E, M, F\}$ の接続が定義される．そして，主束の接続と同伴束 $\mathcal{E}$ の接続とは自然な仕方で 1 対 1 に対応する．

また，$\mathcal{E}$ の接続が与えられると，対応して $\mathcal{E}$ における平行移動が定義される．標準ファイバー F が，群 G の線型表現空間である場合には，これは "ベクトルの平行移動" に他ならない．とくに，標準ファイバー F が群 G の線型表現 (ρ, F) の表現空間であるものを考えると，M の開集合上で定義され，F に値をとる場 ϕ とその共変微分，

$$\nabla_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) + A^a{}_\mu(x) (d\rho)_e (E_a)_e \phi(x)$$

が定義される．

Yang-Mills 流のゲージ理論においては，M は時空，G がゲージ群，$A^a{}_\mu$ はゲージポテンシャル，$F^a{}_{\mu\nu}$ はゲージ場の強さ，ϕ は物質場ということになる．電磁場のポテンシャル A_μ，場の強さ，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は，それぞれ，1 次元ユニタリ群 $U(1)$ を構造群とする主束の，接続係数，曲率テンソルである．

3. 線型枠束，擬似枠束，それらの接続

主束の例であり，また底空間 M 自身の構造と密接に関係している，線型枠束と擬似枠束について述べる[1]．M は可算基をもつものとする．

3.1 線型枠束と接続

n 次元多様体 M について，M の点 x におけ

る接ベクトル空間 $T_x(M)$ の基底を x における接 n 枠という．$T_x(M)$ における接 n 枠全体の集合を $L_x(M)$ と表し，さらに

$$L(M) \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{x\in M} L_x(M)$$

として，n 次元実一般線型変換群 $GL(n,R)$ を構造群とする M 上の主束

$$\mathcal{L}(M) = \{L(M), M, GL(n,R)\}$$

が構成できる．これを M 上の線型枠束という．$\mathcal{L}(M)$ には，正準形式と呼ばれる，束空間 $L(M)$ 上の R^n 値 1–形式 θ が存在する．

$GL(n,R)$ を構造群とする M 上の主束は，他にも存在するが，これに関連して以下の定理がある：

定理 2 $GL(n,R)$ を構造群とする M 上の主束 $\{P, M, GL(n,R)\}$ が $\mathcal{L}(M)$ に束同型であるための必要充分条件は，正準形式 θ が存在することである．

$\mathcal{L}(M)$ は接続をもつが，これを線型接続と呼び Γ_L と記すことにする．対応して接続形式 ω_L があり，捩率形式

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} D\theta,$$

曲率形式

$$\Omega_L \stackrel{\text{def}}{=} D\omega_L$$

が定義される．局所断面 σ を

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\partial_1)_x, (\partial_2)_x, \cdots, (\partial_n)_x\}, \forall x \in U$$

で定義する．$\{P_\mu | \mu = 1,2,\cdots,n\}$ を R^n の自然基底，および $\{E_\mu{}^\nu | \mu,\nu = 1,2,\cdots,n\}$ を，$\mathfrak{gl}(n,R)$ の基底であって n 次正方行列の行列単位から定まるものとして，σ による $\omega_L, \Theta, \Omega_L$ の U への引き戻しを，

$$\sigma^*\omega_L = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} E_\mu{}^\nu dx^\lambda ,$$
$$\sigma^*\Theta = \frac{1}{2} T^\mu{}_{\nu\lambda} P_\mu dx^\nu \wedge dx^\lambda ,$$
$$\sigma^*\Omega_L = \frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} E_\mu{}^\nu dx^\lambda \wedge dx^\rho$$

と表すと，

$$T^\mu{}_{\nu\lambda} = 2\Gamma^\mu{}_{[\lambda\nu]} ,$$
$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 2(\partial_{[\lambda}\Gamma^\mu{}_{\nu\rho]} + \Gamma^\mu{}_{\tau[\lambda}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho]})$$

である．$T^\mu{}_{\nu\lambda}, R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ を成分とするテンソルを，それぞれ，底空間 M の捩率テンソル，曲率テンソルという．

$GL(n,R)$ の線型表現空間を標準ファイバーとする $\mathcal{L}(M)$ の同伴束における共変微分を考えることにより，M 上のベクトル場，さらには一般のテンソル場の共変微分が定義される．

ベクトル場 $V = V^\nu \partial/\partial x^\nu$ の x^μ による共変微分は，

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} V^\lambda$$

で与えられる．

$-\infty \le a < b \le \infty$ として，(a,b) で定義された曲線 $C_g = \{x_t | a < t < b\}$ が次の条件を満足しているとき，C_g を測地線という：C_g の任意の点 x_s での接ベクトル $\dot{x}_s$ を C_g に沿って任意の他の点 x_t に平行移動して得られるベクトルは x_t における C_g の接ベクトル $\dot{x}_t$ である．

曲線 C_g が測地線であるための必要充分条件は，任意の $t \in (a,b)$ に対して，

$$\frac{d^2x^\mu(t)}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu(t)}{dt}\frac{dx^\lambda(t)}{dt} = 0 \qquad (1)$$

が成り立つことである．なお，ここで局所座標系を用いて，$x_t = (x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t))$ と表した．

3.2 擬似枠束と接続

n 次非斉次一般線型変換群を

$$GA(n,R) = T^n \underline{\otimes} GL(n,R)$$

と表す．M の点 x における接ベクトル空間 $T_x(M)$ の元に $GA(n,R)$ の元が作用するものと考えたときの $T_x(M)$ のことを接アフィン空間と呼び，$A_x(M)$ と表すことにする．

$$A(M) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\cup_{x\in M}\{(P, \mathcal{E}_x) | P \in A_x(M), \mathcal{E}_x \in L_x(M)\}$$

とおいて，構成される主束 $\mathcal{A}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{A(M), M, GA(n,R)\}$ を M 上の擬似枠束といい，$\mathcal{A}(M)$ の接続 Γ_A を一般化された擬似接続という．線型枠束 $\mathcal{L}(M)$ は擬似枠束 $\mathcal{A}(M)$ の部分束である．

$GL(n,R)$ の Lie 環，$GA(n,R)$ の Lie 環を，それぞれ $\mathfrak{gl}(n,R), \mathfrak{ga}(n,R)$ と記すと，$\mathfrak{ga}(n,R) =$

$R^n \uplus \mathfrak{gl}(n,R)$（半直和）である．$\mathcal{A}(M)$ の接続 Γ_A の接続形式を ω_A と表すと，ω_A の $\mathcal{L}(M)$ から $\mathcal{A}(M)$ への束準同型写像 γ による $L(M)$ への引き戻しは，$\gamma^*\omega_A = \chi \uplus \omega_L$（半直和）と表される．ここに，$\chi$ は $L(M)$ 上の R^n 値 1–形式であって，M 上の型 $(1,1)$ のテンソル場に一意的に対応する．

$\sigma_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{O_x, \sigma(x)\}, \forall x \in U$ で定義される局所断面 σ_A を考える．ただし，O_x は，$A_x(M)$ の原点を表す．σ_A による ω_A の U への引き戻し ${\sigma_A}^*\omega_A$ を，

$$
{\sigma_A}^*\omega_A = {\Gamma_A}^\mu{}_\nu P_\mu dx^\nu + {\Gamma_A}^\mu{}_{\nu\lambda} E_\mu{}^\nu dx^\lambda
$$

と表すと，接続 Γ_A の曲率形式から定まる曲率テンソルの T^n–部分 ${R_A}^\lambda{}_{\mu\nu}$ および $GL(n,R)$–部分 ${R_A}^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ は，

$$
\begin{aligned}
{R_A}^\lambda{}_{\mu\nu} &= 2(\partial_{[\mu}{\Gamma_A}^\lambda{}_{\nu]} + {\Gamma_A}^\lambda{}_{\rho[\mu}{\Gamma_A}^\rho{}_{\nu]}) , \\
{R_A}^\lambda{}_{\rho\mu\nu} &= 2(\partial_{[\mu}{\Gamma_A}^\lambda{}_{\rho\nu]} + {\Gamma_A}^\lambda{}_{\tau[\mu}{\Gamma_A}^\tau{}_{\rho\nu]})
\end{aligned}
$$

という表示をもつ．

特に，χ が正準形式 θ と一致しているとき，Γ_A を擬似接続という．$\chi = \theta$ のときは，ω_A の曲率形式 $\Omega_A \stackrel{\text{def}}{=} D\omega_A$ について，$\gamma^*\Omega_A = \Theta \uplus \Omega_L$（半直和）が成り立つ．ここに，$\Theta, \Omega_L$ は，それぞれ，線型枠束における捩率形式および曲率形式である．なお，Γ_A が擬似接続であるための必要充分条件は，${\Gamma_A}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ が成り立つことであり，このとき，${\Gamma_A}^\mu{}_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}, {R_A}^\lambda{}_{\mu\nu} = T^\lambda{}_{\mu\nu}, {R_A}^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ となる．

4. 計量擬似接続空間

計量と接続とは独立な概念である．計量 $g = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$ と擬似接続の与えられた多様体を計量擬似接続空間という．

$$
\begin{aligned}
Q_{\lambda\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} -D_\lambda g_{\mu\nu} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} -\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \Gamma^\xi{}_{\mu\lambda} g_{\xi\nu} + \Gamma^\xi{}_{\nu\lambda} g_{\mu\xi}
\end{aligned}
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &\equiv \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix} + K^\lambda{}_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu}{}^\lambda + Q_{\nu\mu}{}^\lambda - Q^\lambda{}_{\mu\nu})
\end{aligned}
$$

である．ここに，右辺第 1 項は Christoffel 記号

$$
\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{\lambda\xi}(\partial_\mu g_{\xi\nu} + \partial_\nu g_{\xi\mu} - \partial_\xi g_{\mu\nu})
$$

であり，第 2 項はコントーションテンソルの成分

$$
K^\lambda{}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\left(T^\lambda{}_{\mu\nu} - T_\mu{}^\lambda{}_\nu - T_\nu{}^\lambda{}_\mu\right) \tag{2}
$$

を表す．$Q_{\lambda\mu\nu}$ を成分とする 3 階共変テンソル場をここでは非計量性テンソルと称することにしよう．曲率テンソルの成分 $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ は，

$$
\begin{aligned}
R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} &\equiv R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}(\{\}) + 2(\nabla_{[\lambda} L^\mu{}_{\nu\rho]} \\
&\quad + L^\mu{}_{\tau[\lambda} L^\tau{}_{\nu\rho]})
\end{aligned}
$$

と表される．ただし，

$$
L^\lambda{}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} K^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu}{}^\lambda + Q_{\nu\mu}{}^\lambda - Q^\lambda{}_{\mu\nu})
$$

とおいた．また，

$$
\begin{aligned}
\nabla_\lambda L^\mu{}_{\nu\rho} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_\lambda L^\mu{}_{\nu\rho} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \tau\ \lambda \end{Bmatrix} L^\tau{}_{\nu\rho} \\
&\quad - \begin{Bmatrix} \tau \\ \nu\ \lambda \end{Bmatrix} L^\mu{}_{\tau\rho} - \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \lambda \end{Bmatrix} L^\mu{}_{\nu\tau} , \\
R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}(\{\}) &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_\lambda \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\ \rho \end{Bmatrix} - \partial_\rho \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\ \lambda \end{Bmatrix} \\
&\quad + \begin{Bmatrix} \mu \\ \tau\ \lambda \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \tau \\ \nu\ \rho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu \\ \tau\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \tau \\ \nu\ \lambda \end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

としている．$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}(\{\})$ は Riemann-Christoffel の曲率テンソルの成分である．

非計量性テンソルは，「平行移動の下でのベクトルの内積の変化の度合い」を表す．M 上至る所でこのテンソルがゼロ，即ち計量条件 $Q_{\lambda\mu\nu} \equiv 0$ が満足されるときは，任意の曲線に沿う平行移動の下でベクトルの内積は変化しない．

曲率テンソルは，「M における区分的可微分な曲線 C に沿うベクトルの平行移動の C 依存性」を表している．曲率テンソルが至る所ゼロであることと M における任意の点 p から任意の点 q へのベクトルの平行移動の結果がこれら 2 点を結ぶ区分的可微分な曲線に依存しないこととは同等である．曲率テンソルが至る所ゼロである M を遠

隔平行性（絶対平行性）を許容する空間という．

また，M 上の区分的可微分な閉曲線をその上の点における接アフィン空間の上に展開したものは，閉曲線とは限らない．捩率テンソルは，「区分的可微分閉曲線の接アフィン空間の上への展開の“開口度”」を表す．M の上の任意の区分的可微分閉曲線のその曲線上の任意の点における接アフィン空間への展開が閉曲線であるための必要充分条件は，捩率テンソルが M 上至る所ゼロであることである．

計量擬似接続空間では，計量テンソル，捩率テンソルおよび非計量性テンソルはそれぞれ独立であるが，これらのテンソルを与えると曲率テンソルは決まってしまう．

計量擬似接続空間としての Euclid 空間，あるいは Minkowski 空間は，「Euclid 計量，あるいは Lorentz 計量（Minkowski 計量）が定義されていて，かつ $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv 0, Q_{\lambda\mu\nu} \equiv 0$，したがってまた $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} \equiv 0$ なるアフィン空間」と理解されるべきものである．実際，3 次元の物理学，特殊相対論およびそれに基づく場の理論においては，これらの空間は――多くの場合，無意識的に――そのようなものとして扱われている．

$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv 0$ と計量条件，$Q_{\lambda\mu\nu} \equiv 0$，とを要請すると，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \left\{ {\lambda \atop \mu\,\nu} \right\}$，即ち，擬似接続は Levi-Civita の接続に帰着する．一般相対論における時空は，このような空間の一種である．また，計量条件と $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} \equiv 0$ が充足される場合には，

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}(\{\}) \equiv -2(\nabla_{[\lambda}K^{\mu}{}_{\nu\rho]} - K^{\mu}{}_{\tau[\lambda}K^{\tau}{}_{\nu\rho]}) \tag{3}$$

となり，**Riemann-Christoffel 曲率テンソルは捩率テンソルで表示される．**

5. 一般相対論における時間–空間

一般相対論は，Einstein によって創始された幾何学的重力理論である[2]．古典粒子に作用する重力は電磁力と似て長距離力であるが，Pisa の斜塔における Galilei の実験で代表されるように，「重力のみの作用の下で運動する粒子の運動はその（慣性）質量によらない」（等価原理）という点で他の力とは決定的に異なり，このことが，重力を時空の幾何学に帰着させる上で基本的役割を果たす．

上の等価原理と「重力が無視できる状況下では特殊相対論が正しい」という前提をおくと，「時空は Lorentz 計量 $g = g_{\mu\nu}dx^{\mu}\otimes dx^{\nu}, (\mu,\nu = 0,1,2,3)$ を備えた 4 次元多様体である」と仮定するのが妥当であることになる．さらに，重力のみの作用下で運動する古典粒子を考えると，その運動は，時空の幾何学的構造だけで決まっていて，重力のない極限では，時空は 4 次元 Minkowski 時空となり，粒子の世界線は時間的直線（あるいは，その連結部分集合）となるはずである．また，微分積分学を用いて議論を進め得るために，「時空は向き付け可能である」ことを前提とする．

特殊相対論との対応からすると，重力がある場合の古典粒子（質点）の世界線は線積分

$$I_C = \int_C d\tau = \frac{1}{c}\int_C \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}$$

に停留値をとらせる $x^{\mu}(\tau)$ で与えられると考えるのが妥当であろう．古典粒子の世界線は，

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \left\{ {\mu \atop \nu\,\lambda} \right\} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0 \tag{4}$$

を満足する，至る所時間的な曲線である．

一般相対論においては，捩率テンソル，非計量性テンソルは共にゼロであるものとする．したがってこのとき，接続係数および曲率テンソルは，それぞれ $\left\{ {\mu \atop \nu\,\lambda} \right\}$ および $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}(\{\})$ で与えられることとなる．これは，古典粒子の運動方程式 (4) に示唆され，また必要最小限の道具立てで理論を構成しようという「経済原則」に基づく選択であって，内的必然性によるものではない．なお，このとき，(4) は，測地線の式 (1) と一致している．

運動方程式 (4) と，万有引力の作用下で運動する質点に対する Newton の運動方程式との対応から，計量テンソルが重力場のポテンシャルと考えられることになる．そして，重力場の基礎方程式（Einstein 方程式）は，Newton の重力ポテンシャル

に対する基礎方程式を手がかりとして定式化された．一般相対論における重力場とその源になっている物体の基礎方程式は，その物体の運動を記述するLagrangian密度を L^M とすると，Lagrangian密度

$$L \stackrel{\text{def}}{=} R(\{\})/(2\kappa) + L^M$$

から導かれることとなる．ここに，κ はEinsteinの重力定数 $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} 8\pi G/c^4$ である．G, c は，それぞれNewtonの重力定数，真空中の光の速さである．また，

$$R(\{\}) \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}(\{\})$$

でこれは，Riemann-Christoffelのスカラー曲率と呼ばれる．

6. 時空構造と重力のゲージ理論

定理 1 によれば，底空間が可算基をもつならば接続が存在する．また，時空がコンパクトであると，時間的閉曲線が存在することになるが，このような曲線を世界線とする運動については，「世界線上の 2 事象相互の時間的前後関係が定められない」ことになってしまう．非コンパクトである場合には，Lorentz計量の存在も保証され，この難点も避けられる．また，時空が連結でない場合は，異なる連結成分どうしは，互いに物理的に隔絶していると考えられる．

ところで，電子やクォークのようなスピノル場に関連して重要な概念として，スピノル構造がある[2,3]．4 次元Lorentz多様体 M について，M の点 x における接ベクトル空間 $T_x(M)$ の線型空間の基底として向き付けられ，また時間的にも向き付けられた正規直交基底を x における接Lorentz枠という．点 x における接Lorentz枠全体の集合 $L_{0x}(M)$ を x の上のファイバーとして，本義順時的Lorentz群 L_0 を構造群とする M 上の主束 $\mathcal{L}_0(M) = \{L_0(M), M, L_0\}$ を構成できる．これを M 上のLorentz枠束という．$\mathcal{L}_0(M)$ は M 上の線型枠束の部分束である．4 次元Lorentz多様体 M が次の条件を満足するとき，M はスピノル構造をもつという[2,3]：M 上の，$SL(2,C)$ を構造群とする主束 $\mathcal{S} = \{S, M, SL(2,C)\}$ と，$f(u\cdot a) = f(u)\cdot \Lambda(a), \forall u \in S, \forall a \in SL(2,C)$ を満足する束準同型写像 $f: S \to L_0(M)$ が存在する．ここに Λ は $SL(2,C)$ から，L_0 への被覆写像を表す．「M がスピノル構造をもつ」ことは，M 上でスピノル場が定義できるための必要充分条件である．

以上を総合して，「時空は可算基をもち，非コンパクトかつ連結であって，かつスピノル構造をもつ向き付け可能な 4 次元Lorentz多様体」とするのが自然である．また，時空 M の各点についての時間的未来と過去の指定が M 上で連続的になされ得るとき，M は時間的に向き付け可能というが，通例は，時空の時間的向き付け可能性も仮定する．

時空は，上述の諸条件を満足するにしても，その計量擬似接続空間としての構造には多くの可能性がある．

計量擬似接続空間は，計量と $Q_{\lambda\mu\nu}$，$T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$，$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}$ で特徴づけられる．一般相対論における時空は，「$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv 0, Q_{\lambda\mu\nu} \equiv 0$ なる条件を満足する 4 次元Lorentz多様体」であって，計量擬似接続空間の特殊例である．「重力は時空の性質に帰着される」にしても，「自然が何故このような時空を選んでいるのか」という問いには一般相対論の枠内では答えられない．数学としては，より広い枠組みがあるのであるから，時空構造も一般相対論におけるものと異なっている可能性もある．実際，重力の幾何学的理論には，いろいろなものがあって，$Q_{\lambda\mu\nu}, T^{\lambda}{}_{\mu\nu}, R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}$ の内の 1 個ないし 3 個が恒等的にはゼロでない諸種の理論が考えられている．

幾何学的枠組みとしては，計量擬似接続空間という広い概念があるけれども，そのことだけでは物理学の理論を構築する際の手だてとしては不充分であり，何らかの物理的指導原理が要る．

素粒子の強，電弱相互作用についての標準理論はゲージ理論である——これをYang-Mills理論と呼ぶことにする——こと，一般相対論における

接続係数 $\left\{ {\mu \atop \nu\lambda} \right\}$ および $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}(\{\})$ は，それぞれ，ゲージポテンシャル $A^{a}{}_{\mu}$，場の強さ $F^{a}{}_{\mu\nu}$ に対応することに注目すると，「重力もゲージ理論の一種として捉えられる可能性」に気づく．

この方向への最初の一歩は Utiyama[4] によって踏み出された．彼は，Minkowski 時空上の場の理論を出発点にとって，一般相対論がゲージ理論として定式化され得ることを示したのであった．

電磁場の理論もゲージ理論の一種である．物体に働く重力と荷電粒子に働く電磁力とは，万有引力と電場による Coulomb 力間の類似性がある一方，磁場による Lorentz 力のように，荷電粒子の速度に線型に依存する力があり，また，電磁力は時空の動力学と切り離して考え得るが，重力理論は時空の動力学そのものである等，両者は相互に大変に異質に見える．それにも拘わらず，共に「ゲージ理論」という同質の論理によって捉えられることは当時としては新鮮な驚きであったに違いない．

その後，重力のゲージ理論は多くの人々によって展開されたが，以下においては，Poincaré 群の被覆群をゲージ群とする理論，およびその還元として得られる理論と，それらにおける時空の幾何学的構造について考察することにしよう．

6.1 Poincaré 群の被覆群をゲージ群とするゲージ理論

ゲージ理論を定式化する際に，まず最初に問題になることは，「ゲージ群は何か」ということである．Yang-Mills 理論にあっては，ゲージ群は力学系のもっている対称性と対応して存在する保存量に応じて定まっている．

時空の理論としての重力のゲージ理論を構成する際には，「Minkowski 時空上の場の理論における時空的対称性と対応する保存量が何であるか」ということが手がかりになろう．この対称性は Poincaré 対称性であり，対応する保存量はエネルギー運動量と角運動量である．また，電子，クォークなど，スピノル粒子が存在する．即ち，時空はスピノル場の存在を許している．これらの考察から，「Poincaré 群の被覆群 $\bar{P}_0$ をゲージ群として採って，Yang-Mills 理論に "できるだけ平行に" 重力のゲージ理論を定式化する」という発想に行き着く[5]．

そこで，時空 M は非コンパクトで可算基をもつ 4 次元多様体として，本義順時的 Poincaré 群の被覆群 $\bar{P}_0 = T^4 \underline{\otimes} SL(2,C)$ を構造群とする，M 上の主束 $\mathcal{P} = \{P, M, \bar{P}_0\}$ に基づいて，重力理論を定式化することができるが，この理論を，ここでは $\overline{\text{Poincaré}}$ ゲージ理論（$\bar{\text{P}}$GT）と呼ぶことにする．$\bar{P}_0/SL(2,C)$ は R^4 と微分同型であることと M は可算基をもつという前提から，「Higgs-型の場」と呼ばれる場 $\{X^k\}$，接続 $\bar{\Gamma}$ の存在，したがってまたゲージポテンシャル $A^{k}{}_{\mu}, A^{kl}{}_{\mu}$ の存在が帰結する．ここに，$k, l, \mu = 0,1,2,3$ であり，$A^{k}{}_{\mu}, A^{kl}{}_{\mu}$ はそれぞれ，接続 $\bar{\Gamma}$ の T^4–部分および $SL(2,C)$–部分を表す．理論における基本的な場は，これら 3 つと $\bar{P}_0$ の線型表現に属する物質場 $\phi = \{\phi^A, A = 1, 2, \cdots, N\}$ である．

X^k の共変微分は，

$$D_\mu X^k = \partial_\mu X^k + A^{k}{}_{l\mu} X^l + A^{k}{}_{\mu}$$

となるが，

$$e^{k}{}_{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} D_\mu X^k$$

とおき，行列 $(e^{k}{}_{\mu})$ は正則であるものとして，

$$\boldsymbol{e}^k \stackrel{\text{def}}{=} e^{k}{}_{\mu} dx^\mu, \ (k = 0, 1, 2, 3)$$

の双対

$$\boldsymbol{e}_k = e^{\mu}{}_{k} \partial/\partial x^\mu$$

を 4 脚場という．

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{kl} e^{k}{}_{\mu} e^{l}{}_{\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

を M の計量テンソルと同定する．ただし，

$$(\eta_{kl}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

である．

主束 $\mathcal{P}$ は部分束 $\mathcal{S} = \{S, M, SL(2,C)\}$ をもち，これがスピノル構造を与え，さらには M が非コンパクトであると前提されていることと相俟って M は向き付け可能であることが帰結する．

また，M 上の $\bar{P}_0$–構造の基本形式と呼ばれる P 上の 1–形式が存在して，これと $\mathcal{P}$ の接続形式 ω から，4 脚場の強さ $T^{k}{}_{\mu\nu}$，T^4–ゲージポテンシャルの強さ $R^{k}{}_{\mu\nu}$ および $SL(2,C)$–ゲージポテ

ンシャルの強さ $R^k{}_{l\mu\nu}$ が定まる．これらは，

$$T^k{}_{\mu\nu} = 2(\partial_{[\mu}e^k{}_{\nu]} + A^k{}_{l[\mu}e^l{}_{\nu]}) ,$$
$$R^k{}_{\mu\nu} = 2(\partial_{[\mu}A^k{}_{\nu]} + A^k{}_{l[\mu}A^l{}_{\nu]}) ,$$
$$R^{kl}{}_{\mu\nu} = 2(\partial_{[\mu}A^{kl}{}_{\nu]} + A^k{}_{m[\mu}A^{ml}{}_{\nu]}) \quad (5)$$

という表示をもち，また以下の関係が成り立つ：

$$T^k{}_{\mu\nu} = R^k{}_{\mu\nu} + R^k{}_{l\mu\nu}X^l .$$

(5) から，

$$A^{kl}{}_\mu = \Delta^{kl}{}_\mu + K^{kl}{}_\mu$$

を得る．なお，

$$\Delta^{kl}{}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(C^{kl}{}_\mu - C^{lk}{}_\mu - C_\mu{}^{kl}) ,$$
$$C^k{}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} 2\partial_{[\mu}e^k{}_{\nu]} ,$$
$$K^{kl}{}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}(T^{kl}{}_\mu - T^{lk}{}_\mu - T_\mu{}^{kl}) \quad (6)$$

とおいた．$\Delta^{kl}{}_\mu$ を Ricci の回転係数という．

電子，クォーク等を記述する Dirac 場 ψ の共変微分は，

$$D_k\psi \stackrel{\text{def}}{=} e^\mu{}_k\left(\partial_\mu\psi + i\frac{1}{2}A^{lm}{}_\mu S_{lm}\psi\right) \quad (7)$$

である．ここに，

$$S_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} -i[\gamma_k, \gamma_l]/4$$

である．γ_k は，Dirac のガンマ行列である．$\gamma_0, \gamma_a, (a = 1, 2, 3)$ はそれぞれ反エルミート，エルミートな 4×4 行列で，$\gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k = 2\eta_{kl}$ なる関係が成り立つ．

一方，M 上の擬似枠束 $\mathcal{A}(M) = \{A(M), M, GA(4, R)\}$ を考えると，$\mathcal{P}$ から $\mathcal{A}(M)$ への 2 対 1 の束準同型写像 F が存在する．「F は $\bar{\Gamma}$ を $\mathcal{A}(M)$ の接続 Γ_A に写す」という要請をおくと，関係式

$$\Gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu ,$$
$$A^k{}_{l\mu} = e^k{}_\nu e^\lambda{}_l \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} + e^k{}_\nu \partial_\mu e^\nu{}_l$$

が帰結し，これからさらに，計量条件 $Q_{\lambda\mu\nu} \equiv 0$ が導かれる．時空が，Lorentz 計量をもつ擬似接続空間であって，かつ計量条件を満足するとき，これを Riemann-Cartan 時空という．また，

$$T^k{}_{\mu\nu} \equiv e^k{}_\lambda T^\lambda{}_{\mu\nu} = e^k{}_\lambda R^\lambda{}_{\mu\nu} ,$$
$$R^k{}_{l\mu\nu} \equiv e^k{}_\lambda e^\rho{}_l R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$$

である．この第 1 式，(2)，(6) から，$K^k{}_{l\mu} = e^k{}_\lambda e^\nu{}_l K^\lambda{}_{\nu\mu}$ が得られる．「系の Lagrangian 密度は，場の変数 $X^k, A^k{}_\mu, A^{kl}{}_\mu, \phi^A$ とそれらの 1 階微分の高々 2 次である」ものとして，作用積分の $\bar{P}_0$–ゲージ不変性および時間反転および空間反転の下での不変性を要請すると，重力場の Lagrangian 密度としては，10 個のフリーパラメーターを含むものが得られる：

$$L^G \stackrel{\text{def}}{=} L^T + L^R + dR .$$

ここに，

$$L^T \stackrel{\text{def}}{=} c_1 t^{klm}t_{klm} + c_2 v^k v_k + c_3 a^k a_k ,$$
$$L^R \stackrel{\text{def}}{=} d_1 A^{klmn}A_{klmn} + d_2 B^{klmn}B_{klmn}$$
$$+ d_3 C^{klmn}C_{klmn} + d_4 E^{kl}E_{kl}$$
$$+ d_5 I^{kl}I_{kl} + d_6 R^2$$

であり，c_i, d_j $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \cdots, 6)$ および d は全て実定数パラーメーターである．t_{klm}, v_k および a_k は場の強さ T_{klm} の既約成分であり，$A_{klmn}, B_{klmn}, C_{klmn}, E_{kl}, I_{kl}$，および R は場の強さ R_{klmn} の既約成分である．とくに，$R \stackrel{\text{def}}{=} R^{kl}{}_{kl}$ であって，これはスカラー曲率である．

重力場の Lagrangian 密度 L^G は，別の流儀で定式化される Poincaré ゲージ理論[6]（PGT）におけるものと一致する．質量 m の Dirac 場 ψ の Lagrangian 密度を L_D と表すと，

$$L_D = \frac{\hbar c}{2}(\bar{\psi}\gamma^k D_k\psi - D_k\bar{\psi}\gamma^k\psi) - mc^2\bar{\psi}\psi$$

である．なお，h を Planck 定数として，

$$\hbar \stackrel{\text{def}}{=} h/2\pi$$

であり，$\bar{\psi}$ はアジョイントスピノル

$$\bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} i\psi^\dagger\gamma_0$$

を表す．また，

$$D_k\bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} e^\mu{}_k\left(\partial_\mu\bar{\psi} - i\frac{1}{2}A^{lm}{}_\mu\bar{\psi}S_{lm}\right) \quad (8)$$

である．L_D は，

$$L_D = \frac{\hbar c}{2}(\bar{\psi}\gamma^k\nabla_k\psi - \nabla_k\bar{\psi}\gamma^k\psi) - mc^2\bar{\psi}\psi$$
$$-i\frac{3\hbar c}{4}a_k\bar{\psi}\gamma_5\gamma^k\psi \quad (9)$$

と書き換えられる．ただし，

$$\gamma_5 \stackrel{\text{def}}{=} i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0$$

である．$\nabla_k\psi$,$\nabla_k\bar{\psi}$ は，それぞれ (7), (8) において $A^{kl}{}_\mu$ を $\Delta^{kl}{}_\mu$ で置き換えて得られるもので，一般相対論における共変微分である．**$\bar{\mathrm{P}}$GT, PGT におけるスピノル場と重力場の相互作用は，一般相対論におけるものとは，(9) の右辺の最後の項だけ異なる．**

電磁場の Lagrangian 密度としては，$U(1)$ ゲージ不変性の要請をおくと，

$$L_{e.m.} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$$

を採ることとなる．

場 X^k の方程式は，物質場 ϕ^A とゲージポテンシャル $A^k{}_\mu$ の場の方程式が充足されているならば自動的に満足されていて，その意味で，この場 X^k は非力学的な場である．

$\{X^k, A^k{}_\mu, A^{kl}{}_\mu, \phi^A\}$ を独立な場の量のセットとして選ぶと，エネルギー運動量密度，角運動量密度が共に M 上のベクトル密度となり，それらの空間的超曲面上の積分である，その面上での重力場のエネルギー運動量，角運動量が well-defined になる[7]．これは一般相対論にはない長所と言える．

さらには，漸近的平坦時空では，系全体のエネルギー運動量，角運動量の表式は，一般相対論における対応する量のそれと一致する．$\bar{\mathrm{P}}$GT にあっては，保存するエネルギー運動量および角運動量が，(内部) $\bar{P}_0$–変換の生成子となっており，Yang-Mills 理論との対応がよい．

また，重力場のみの影響下のスピン 1/2 の場の波束の運動は，$g_{\mu\nu}$ で定まる (4) で記述される．また，$a_k \neq 0$ の場合はスピン歳差運動が一般相対論におけるのと異なる[6]．また，恒星，惑星のような巨視的物体のように，構成粒子のスピンが無視できる場合には，物体が重力のみの作用下で運動する場合の運動方程式も (4) で与えられる[6]．なお，この式は Riemann-Cartan 時空における測地線の方程式ではないことに注意しよう．この理論は，パラメーター c_i, d_j, d が一定の条件を満足する場合には，巨視的重力現象を一般相対論と同レベルの精度で再現できる．

6.2 遠隔平行性理論

$\overline{\text{Poincaré}}$ ゲージ理論において，

$$R^k{}_{l\mu\nu} \equiv e^k{}_\lambda e^\rho{}_l R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} \equiv 0$$

である場合を考えると，計量条件 $Q_{\lambda\mu\nu} \equiv 0$ を満足して遠隔平行性を許容する時空が得られるが，この 2 条件を満足する時空を Weitzenböck 時空という．また，こうして得られる理論を拡張された新一般相対論 (ENGR) と呼ぶことにする[8]．ここで，$SL(2,C)$ のゲージを $A^{kl}{}_\mu \equiv 0$ と選ぶと，

$$e^k{}_\mu = \partial_\mu X^k + A^k{}_\mu , \quad \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e^\lambda{}_l \partial_\nu e^l{}_\mu ,$$
$$D_k\psi = D_k^*\psi \stackrel{\text{def}}{=} e^\mu{}_k \partial_\mu \psi$$

となる．

$L^R = 0 = dR$ であるから，重力場の Lagrangian 密度 L^G は $L^G = L^T$ となって，同じく Weitzenböck 時空に基づく理論である新一般相対論[9]（NGR）におけるものと一致する．

$\{X^k, A^k{}_\mu, \phi^A\}$ を独立な場の量のセットとして選ぶと，エネルギー運動量密度，角運動量密度が共に M 上のベクトル密度となり好都合である点は $\bar{\mathrm{P}}$GT の場合と同様である[7]．最近の結果によれば[10]，ENGR における重力場のエネルギー運動量密度の線型近似の表式は，関与する物質のスピンの効果が無視できる限り，一般相対論における正準エネルギー運動量の線型近似式と事実上一致する．後者は，テンソル密度ではないことを考えると，これは興味深い結果と思われる．さらに，$c_1 = -1/(3\kappa) = -c_2$ の場合は，漸近的平坦時空では，若干の付加的条件を課した上で，系全体のエネルギー運動量，角運動量の表式は，一般相対論における対応する量のそれと一致することが判っている[8]．また，重力場のみの影響下の巨視的物体の運動，スピン 1/2 の場の波束の運動およびスピン歳差運動については，$\bar{\mathrm{P}}$GT, PGT におけるのと同様なことが成り立つ[9]．なお，(4) で表される曲線は遠隔平行性理論における測地線ではない．

$c_1 = -1/(3\kappa) = -c_2$ のときは，この理論は，これまでに知られている巨視的重力現象を一般相対論と同等の精度で記述する．

6.3 一般相対論との関係

$\bar{\mathrm{P}}\mathrm{GT}$ において, $T_{klm} \equiv 0$ を要請すると, $L^T \equiv 0$ であり，さらに

$$d_i = 0,\ (i = 1, 2, \cdots, 6),\ d = 1/(2\kappa)$$

とおくと

$$L^G = R(\{\})/(2\kappa)$$

となって，理論は，実質上一般相対論に帰着する．また,

$$A^{kl}{}_\mu = \Delta^{kl}{}_\mu$$

となるが，これを,

$$e^k{}_\mu = \partial_\mu X^k + A^k{}_{l\mu} X^l + A^k{}_\mu$$

の右辺に代入すると，右辺には，$e^k{}_\mu$ とその微分 $\partial_\mu e^k{}_\nu$ が現れて，4 脚場の成分は複雑な構造をもつことになる．**一般相対論は $\bar{\mathbf{P}}\mathbf{GT}$ の観点から見ると，この点において単純でない．**

また，遠隔平行性理論において，特に

$$c_1 = -1/(3\kappa) = -c_2,\ c_3 = -3/(4\kappa)$$

である場合は,

$$L^T = \frac{1}{2\kappa} R(\{\}) + \frac{\partial_\lambda(\sqrt{-g}e^\lambda{}_k v^k)}{\kappa\sqrt{-g}}$$

となる．ここに，$g \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det(g_{\mu\nu})$ である．この理論においては重力場，古典粒子，スカラー場，電磁場のみが関与する系については，それらの運動方程式は一般相対論におけるものと一致する．**一般相対論と,**

$$c_1 = -1/(3\kappa) = -c_2,\ c_3 = -3/(4\kappa)$$

である場合の遠隔平行性理論とは，この限りにおいては，「等価」なのである．一般相対論にあっては Riemann-Christoffel の曲率テンソル $R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}(\{\})$ が，また遠隔平行性理論では捩率テンソル $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ が，それぞれ重力を記述している．両理論における時空の幾何学的構造は極めて異なるにも拘わらず「等価」になるのである．このようになる「ルーツ」の 1 つは，(3) の関係にある．

$$c_1 = -1/(3\kappa) = -c_2,\ c_3 = -3/(4\kappa)$$

である場合でも,「EGNR における，重力場のエネルギー運動量密度，角運動量密度はベクトル密度であるが，一般相対論においては，このような簡明さはない」こと,「**スピノル場が関与している場合には，遠隔平行性理論は一般相対論とは異なっている**」ことに注意しておこう．

7. おわりに

電磁場は,「時空が Lorentz 計量をもっている」ことと密接に関係しているが，時空の幾何学量は電磁場の力学変数ではない．一方，重力場は，その存在自身を含めて，時空の幾何学量とその動力学で記述される．このことは，重力理論は線型枠束，擬似枠束の接続の理論に基づいており，その結果として正準形式 θ, 捩率という概念が存在して，ここでは計量テンソル，捩率テンソル等が力学量であることに対応している．Yang-Mills 理論においては，時空の計量テンソルは力学変数ではなく，また，捩率という概念は存在しない*2)．重力理論は，この点において Yang-Mills 理論と際だって異なる．

重力のゲージ理論において時空の幾何学的構造を決めているのは計量と接続である．接続は重力場と物質場の相互作用の仕方を規定し，同時に曲率，捩率を決める．

我々は, 計量擬似接続空間を, 主として重力理論, とくに一般相対論, $\overline{\text{Poincaré}}$ ゲージ理論, Poincaré ゲージ理論および遠隔平行性理論との関わりにおいて論じてきた．重力理論には，この他にも，計量擬似ゲージ理論，超重力理論等があるが，これらの理論における時空は全て計量擬似接続空間である[11,12]．Nester と Yo による「対称遠隔平行性理論」[12] における時空は，曲率テンソルも捩率テンソルも共にゼロであって，非計量性テンソルが非ゼロで，これが重力を担っているという一風変わったものである．

電磁力と重力は，素粒子の基本的相互作用でありながら，巨視的世界に直接顔を出している．電

---

*2) **定理 2** はこの点に関連して重要である．

磁場（光）は，特殊相対論の契機となったのみならず，黒体輻射，光電効果等を通じて量子論を教え，また，ゲージ理論の原型を具現しているなど，物理学の発展において重要な鍵として機能してきた．大雑把に言えば，「電磁力（電磁場）は時空のLorentz計量，量子論およびゲージ理論を，重力は時空が平坦でないことを」我々に教えたのである．これら2つの力は，「自然界の奥深いところからの情報の直接的伝達者」であり，今後も時空構造を知る上での強力な探針であり続けるであろう[13]．

また，計量擬似接続空間の理論は，結晶における転位や回位のような「欠陥」の記述[14]，さらには超伝導現象における「ピン止め」の説明などにおいても活用されている[15]．重力理論とこれら物性物理学とのアナロジーの考察は，この空間に対する物理的描像をより豊かにし，理論の発展に寄与するものと思われる．

参考文献

1) S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol.1, Interscience Publishers (1963).
2) R.M. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press (1984).
3) R. Geroch, *J. Math. Phys.* **9**, 1739 (1968).
4) R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
5) T. Kawai, *Gen. Rel. Grav.* **18**, 995 (1986); **19**, 1285E (1987).
6) K. Hayashi and T. Shirafuji, *Prog. Theor. Phys.* **64**, 866 (1980); **64**, 883 (1980); **64**, 1435 (1980).
7) T. Kawai, *Phys. Rev.* **D62**, 104014 (2000).
8) T. Kawai and N. Toma, *Prog. Theor. Phys.* **85**, 901 (1991).
9) K. Hayashi and T. Shirafuji, *Phys. Rev.* **D19**, 3524 (1979).
10) E. Sakane and T. Kawai, 論文準備中.
11) F.W. Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke and Y. Ne'eman, *Phys. Rep.* **258**, 1 (1995).
12) J.M. Nester and H.-J. Yo, *Chinese J. Phys.* **37**, 113 (1999).
13) F.W. Hehl and Y.N. Obukhov, in Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space, C. Lämmerzahl *et al.*, eds., Lect. Notes Phys. Vol.**562**, pp.479–504, Springer-Verlag (2001).
14) H. Kleinert, Gauge Fields in Condensed Matter, Vol.**2**, World Scientific (1989).
15) I. Tanaka, *Phys. Lett.* **A277**, 262 (2000).

（かわい・としはる，大阪市立大学理学研究科）

余空間

坂井　伸之

1. 余空間と力の統一理論

我々の認識する世界は空間3次元，時間1次元の4次元時空である．それ以外の次元の広がり―余空間―はないのだろうか．約90年前から現在まで，物理学者が真剣に考えている大きな課題である．

物理学における余空間は，力の統一理論と密接な関係がある．自然界には，我々が日常的に感じる重力と電磁気力に加え，陽子と中性子を束縛して原子核をつくる強い力，ベータ崩壊（中性子が陽子に変身する現象）を司る弱い力，の4種類の力（相互作用）が存在する．これら4つの力は一つの実体の異なる側面にすぎないというのが統一理論の立場であり，物理学者は長年この実体となる力の姿を探求し続けてきた．「電磁気力」という概念も，電気と磁気の統一というマクスウェルの理論の成果である．電磁気力と弱い力は，1960年代にワインバーグとサラムによって「電弱力」として統一され，1973年に実験で検証された．その後現在まで，電弱力と強い力を統一する大統一理論，それに重力も含める量子重力理論が探求されているが，未だ成功に至っていない．

一方，電磁気力と弱い力が統一されるずっと以前から，電磁気力と重力を統一しようとする試みがあった．アインシュタインが一般相対論を発表した1916年の数年後，カルツァは一般相対論とマクスウェル理論を統一する理論を提案し，続いてクラインがそれを数学的に再定式化し，カルツァ・クライン（KK）理論と呼ばれるものとなった．後で詳しく述べるように，通常の4次元アインシュタイン方程式（重力）とマクスウェル方程式（電磁気力）は，「5次元時空」におけるアインシュタイン方程式に統一されたのである．

KK理論は成功には至らなかったが，そのアイディアは様々な形で生かされ，高次元時空の理論は現代物理学の主要テーマの一つである．本稿では，KK理論を中心に，余空間に関する主なトピックを紹介する．

2. アインシュタインの一般相対性理論

KK理論を理解するためには，一般相対論とマクスウェル理論についてある程度理解しておくことが必要である．まずは，一般相対論の特徴をまとめておく．

ニュートン力学では，重力場中の質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -\nabla\phi_g, \quad \boldsymbol{x} = (x, y, z)$$

で与えられる．ここで ϕ_g は重力ポテンシャルであり，質点は力 $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi_g$ を受けてユークリッド空間を運動する．一方，一般相対論におけるテスト粒子（自己重力の影響が無視できる粒子）の運動方程式は

$$m\frac{D^2x^\mu}{D\tau^2}=0,\quad x^\mu=\{x,y,z,ct\}$$

である．座標時間 t に光速 c を掛けた ct が第4の座標になり，運動方程式の独立変数 τ は，テスト粒子自身の感じる時間である（図1）．$D/D\tau$ は，ユークリッド空間を拡張したリーマン空間で意味を持つ新しい微分演算子である．重力は「時空の歪み」として表現され，テスト粒子は歪んだ時空の中を「まっすぐに」運動する．そのため，力の項が右辺から消えている．$-\nabla\phi_g$ に相当する項は，幾何学量として左辺に含まれるのである．

では，時空の歪み具合は数学的にどのように表現されるのだろうか．2次元平面を例にとってみよう．平面では，任意の2点間 (x_1,y_1), (x_2,y_2) の長さ Δs は，三平方の定理から

$$\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2,$$
$$\Delta x\equiv x_1-x_2,\quad \Delta y\equiv y_1-y_2$$

となる．次に，曲面の例として地球の表面を考えよう．地球儀を切り開いて平面にしたのが世界地図であるが，都市間の距離がすべて正確な地図を作ることは不可能である．これは，球面と幾何学が平面の幾何学（ユークリッド幾何学）と異なることに起因する．その場合，有限距離 Δs を簡単に表現することはできないので，微分量（無限小距離）ds に注目するほうが都合よい．球座標 (θ,φ) を用いると，無限小離れた2点間の距離は

$$ds^2=R^2(d\theta^2+\sin^2 d\varphi^2),\quad R=\text{地球の半径}$$

と表される（$90°-\theta$ が北緯，φ は東経または西経に対応）．このように，空間の歪みは無限小距離 ds によって表現されることがわかる．

これを一般のリーマン空間に拡張すると，

$$ds^2=\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (1)$$

と表される．ここで N は時空の次元であり，上の例では $N=2$，一般相対論やマクスウェル理論では $N=4$，KK 理論では $N=5$ となる．$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれ，4×4 の対称行列である．以下では，慣例に習って同じ添字が上下に現れたら必ず和をとるものとし，和記号 $\sum$ は省略する．例えば，式 (1) は単に $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ と表される．「距離」の定義について，1つ重要な約束事がある．平坦な時空を例にとると，

$$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$$

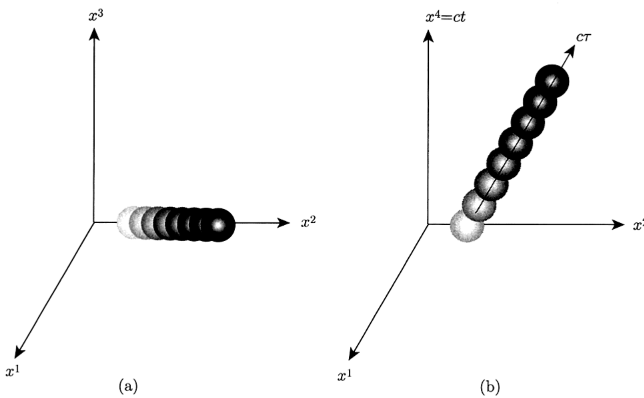


図1　(a) 3次元空間と (b) 4次元時空．(b) では x^3 方向を省略．例えば等速で運動する物体は，未来に向かう直線として表現される．

のように，時間方向の微小距離2乗にはマイナス符号をつけるというきまりになっている．

ニュートン力学では，与えられた質量密度分布 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ からポアッソン方程式

$$\triangle\phi_g = 4\pi G\rho$$

によって重力ポテンシャルが決定される．一般相対論では，重力ポテンシャルに相当するのが計量テンソル $g_{\mu\nu}$ であり，物質分布から $g_{\mu\nu}$ を決定するのがアインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (2)$$

である．$R_{\mu\nu}$ は時空の曲率を表すテンソルで，$g_{\mu\nu}$ を微分して得られる量である．$T_{\mu\nu}$ は，物質の重力源としての寄与を表すテンソルであり，質量密度，運動量，圧力などを成分に持つ．

3. マクスウェルの電磁場理論

真空中を伝搬する電磁場は，マクスウェル方程式によって次のように記述される（CGS単位系）．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

ここでポテンシャル ϕ_e, $\boldsymbol{A}$ を導入し，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi_e - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (5)$$

とおけば，式(3)は自動的に満たされる．したがって，式(5)と(4)を基本法則と見ることができる．

これら電磁気学諸量および基礎方程式は，4次元テンソルの導入により更に統一的に書くことができる．まず，電場と磁場をまとめた電磁場テンソルを定義する．

$$F^{\mu\nu} = u^\mu(\boldsymbol{E})^\nu - (\boldsymbol{E})^\mu u^\nu - \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}u_\lambda(\boldsymbol{B})_\sigma$$

ここで u^μ は，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ などの3次元量を観測する観測者の4次元速度ベクトルであり，空間座標一定の点に固定された観測者を選べば $u^\mu = (1,0,0,0)$ となる．$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ は完全反対称テンソルであり，$(\boldsymbol{E})^\nu \equiv (0,\boldsymbol{E})$ である．

更に，スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ から，4次元ベクトル

$$A^\mu = \phi_e u^\nu + (\boldsymbol{A})^\nu$$

を定義すると，電磁場の基本法則(5)および(4)は次のようにまとめられる．

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (6)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad (7)$$

ここで，∇_μ は共変微分と呼ばれ，偏微分 $\partial/\partial x_\mu$ をリーマン空間に拡張した演算子である．また，テンソルの添字の上げ下げは，計量 $g_{\mu\nu}$ およびその逆行列 $g^{\mu\nu}$ によって，例えば $F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu}F^{\lambda\sigma}$ のように行う．

なお，マクスウェル理論は特殊相対論を内在し，一般相対論とも整合的になっている．電磁場のエネルギー運動量テンソルを

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\sigma\kappa}F^{\sigma\kappa} \qquad (8)$$

と定義すれば，アインシュタイン方程式(2)と併せて重力場–電磁場共存系が完全に記述される．

4. カルツァ・クライン理論

2節と3節で述べたように，重力場は計量 $g_{\mu\nu}$ によって，電磁場はポテンシャル A_μ によって表現される．カルツァは5次元時空を考え，5次元計量 g_{AB} $(A,B=1\sim5)$ の中に $g_{\mu\nu}$ と A_μ を取り込むことを考えた．最初に思いついたカルツァが偉大であることには変わりないが，言われてみればごく自然な考え方である．

g_{AB} の成分の数は15，$g_{\mu\nu}$ は10，A_μ は4である．したがって，あと1つ関数 ϕ を導入すれば，任意の g_{AB} は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{AB}dx^A dx^B \qquad (9)\\ &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \Phi^2(dx^5 + \kappa A_\nu dx^\mu)^2 \end{aligned}$$

と書き表すことができる．κ は定数であり，またこの時点では，A_μ の物理的意味は明らかではない．ここで「円柱条件」を要請する．それは，x^5

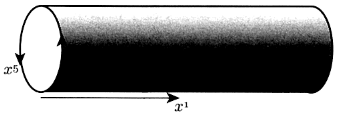


図 2　カルツァ・クライン理論における 5 次元目の空間．他の 3 次元が広がっているのに対し，5 次元目方向は小さく閉じている．

方向について

$$x^5 \sim x^5 + 2\pi L$$

で同一視して閉じた（コンパクトな）空間とする．仮に，空間が x^1 方向と x^5 方向だけの 2 次元だったとすると，ストローのような構造になる（図 2）．

更に，x^5 方向の並進に対し計量 (9) が形を変えないことを要請し，5 次元時空における真空 ($T_{AB}=0$) のアインシュタイン方程式

$$G_{AB} = 0 \tag{10}$$

を書き下すと，

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 \Phi^2}{2} T_{\mu\nu} - \frac{1}{\Phi}(\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \Box \Phi) \tag{11}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -3 \frac{\nabla_\mu \Phi}{\phi} F^{\mu\nu} \tag{12}$$

$$\Box \Phi = -\frac{\kappa^2 \Phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

となる．$\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu$ はダランベール演算子である．$T_{\mu\nu}$ と $F^{\mu\nu}$ は，通常の電磁場テンソル (6) および電磁場のエネルギー運動量テンソル (8) で与えられる．これらは 4 次元時空における（修正された）アインシュタイン方程式，マクスウェル方程式，スカラー場の方程式になっている．

カルツァは $\Phi = 1$，$\kappa^2 = 16\pi G/c^4$ とおいた．その場合，式 (11) は 4 次元アインシュタイン方程式 (2) に，式 (12) はマクスウェル方程式 (7) に完全に一致する．つまり，電磁場と重力場は幾何学量 (9) として表され，5 次元アインシュタイン方程式 (10) によって統一的に記述されたのである．

式 (11) は，時空の性質について重要なことを示唆している．アインシュタイン方程式の中で $T_{\mu\nu}$ の符号が変わるとは物理的に許されず，$\Phi^2 > 0$ でなければならないが，Φ が 5 次元計量 (9) で定義されたことを思い出すと，5 番目の次元が空間的であるという結論に達するのである．この性質はかなり一般的で，時空が何次元であっても時間の方向は 1 つと決まっているようである．

電磁場が現れたことは偶然ではなく，次のように理解することができる．上の議論では計量が x^5 によらないことを仮定したが，これは

$$x^5 \;\to\; x^5 + \kappa\alpha \tag{13}$$

に対して計量 (9) が不変ということである．ここで，α が定数でなく座標の関数 $\alpha(x^\mu)$ である（これを局所的変換と呼ぶ）とすると，dx^5 は

$$dx^5 \;\to\; dx^5 + \kappa \frac{\partial \alpha}{\partial x^\rho} dx^\rho$$

と変換されるので，計量 (9) を不変に保つには，A_μ が

$$A_\mu \;\to\; A_\mu - \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$$

と変換されなければならない．これは，電磁場におけるゲージ変換になっている．電磁場は $U(1)$ ゲージ理論と呼ばれるが，$U(1)$ 対称性とは，ディラック場 ψ について $\psi \to e^{i\alpha(x^\mu)}\psi$ という局所的位相変換を施しても，場の方程式は不変ということであった．したがって，この $U(1)$ 対称性と同等の対称性を 5 次元方向に課したことにより，KK 理論において電磁場が導かれたのである．

ところで，5 次元目の空間の有無について，我々はどのように知ることができるのだろうか．5 次元目の方向を直接見ることはできなくても，その存在について示唆を与えてくれるのが物理法則である．我々は，距離 r 離れた粒子に働く重力や静電気力が $1/r^2$ に比例することを知っている．このことは，実は空間が 3 次元であることに関係している．3 次元空間では，ある点から距離 r 離れた点の集合が 2 次元球面をなし，その面積は $4\pi r^2$ である．したがって，r が増加するに連れて力のパワーは $1/r^2$ で減少するのである．このことから，もし空間が 4 次元であるならば，重力や静電気力は $1/r^3$ に比例していなければならない．し

かし，現実は $1/r^2$ に比例しているので，やはり余空間は存在しないのだろうか．

5 次元目方向が存在したとしても，それが十分小さければ重力や静電気力の法則に影響を及ぼさない．我々はすでに，x^5 方向については閉じた空間を仮定していたが，そのサイズ L がプランク距離 $\sim 10^{-33}$ cm 程度であれば，あらゆる実験結果と矛盾しないことになる．

5. 時空は 11 次元？ 超重力理論と超弦理論

前節では，5 次元時空において電磁力と重力が統一的に記述されることを示した．ところが，自然界の 4 つの力を統一しようとする立場からすると，この 2 つの力だけを統一するのは不十分である．実際，電磁力と弱い力の統一理論（ワインバーグ・サラム理論）は既に確立しており，少なくともこれと無矛盾でなければならない．

マクスウェル理論は $U(1)$ ゲージ理論（ゲージ場は 1 つ）であるが，これに弱い力を融合したワインバーグ・サラム理論は，$SU(2)\times U(1)$ 対称性を持つ 4 つのゲージ場で記述される．$SU(2)$ とはある条件を満たす 2×2 複素行列であり，異なる 2 種類の粒子を混ぜる変換を表す．更に，強い力は $SU(3)$ 対称性を持つ 8 つのゲージ場によって記述される．これらを併せた $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論は素粒子の標準理論と呼ばれ，これまでの素粒子実験結果と見事な一致を見せている．（ただし，最近発見されたニュートリノ振動は，ニュートリノが質量を持つことを意味し，標準理論を超えた最初の現象である．）

標準理論の対称性の考え方を更に拡張したのが超対称性理論である．自然界に存在する素粒子は，クォークやレプトンはフェルミ粒子，力を媒介する光子などはボーズ粒子と，そのスピンまたは統計的性質によって 2 種類に分類されるが，

$$\text{フェルミ粒子} \Longleftrightarrow \text{ボーズ粒子}$$

と相互に変換する対称性を要請するのである．すると，すべてのフェルミ粒子にはボーズ粒子の，ボーズ粒子にはフェルミ粒子の相棒（超対称性粒子）が存在することになる．超対称性粒子は未発見であるが，超対称性理論が理論的な様々な理由で支持されている．例えば，超対称性がなければ真空の零点振動エネルギーがプランク質量の 4 乗程度の大きさで残り，宇宙項に対する観測的制限の 100 桁以上も大きくなってしまうが，超対称性を導入すると全体でゼロになる．

特に，超対称性を局所化すると重力が自然に含まれ，これを超重力理論と呼ぶ．1981 年に Witten は，素粒子標準理論を含んだ超重力理論を提案した．時空を 11 次元（余空間は 7 次元）にすると $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論が重力と統一的に記述されることを示したのである．余分な 7 次元は，やはりコンパクト化されると考える．しかし，現実のクォーク・レプトンをうまく説明できないなど幾つか難点があり，成功には至っていない．

更に，究極の統一理論として注目されているのが超弦理論である．自然界の基本的要素は点粒子ではなく，閉じた弦が振動によって粒子が形づくられているというのが弦理論のアイデアである．もともと弦理論は強い相互作用の理論として提案されたが，重力の量子的発散が現れないことが発見されてから，量子重力を含む統一理論として発展した．超対称性の手法を導入したことから超弦理論と呼ばれており，低エネルギー極限として超重力理論を含んでいる．物質を構成するクォーク・レプトンも，力を媒介する光子・重力子等も，実は 10^{-33} cm の弦の振動であったと解釈される．超弦理論における時空の次元は，理論の整合性のみから 10 次元と決まる．我々が認識する 4 次元時空のほかに 6 次元の余空間があり，KK 理論と同様に余空間は小さく閉じていると考えられている．

これまでの研究から，矛盾のない超弦理論は 5 種類あることが知られている．しかし，1995 年頃から，超対称性代数によって構成される「M 理論」が究極の統一理論ではないかと考えられるようになった．一見異なって見える 5 種類の超弦理論は，実は M 理論の異なる側面であったと見ることが

できるのである．簡単に言うと，超弦理論が1次元の弦の理論であるのに対し，M理論は2次元の「膜」を基本的要素とする理論である．時空全体の次元も，超弦理論より1つ多い11次元となる．結果的に，超重力理論で予言されていた11次元と一致したことは面白い．

6. カルツァ・クライン宇宙

5次元KK理論にしても11次元超弦理論にしても，空間3次元は大きく広がって現在の宇宙となり，残りの次元方向は小さく閉じていることが仮定されている．このような次元の分離はどのように起こるのだろうか．

この問題について，ChodosとDetwilerは面白いアイディアを提案した．$d+1$次元時空におけるアインシュタイン方程式の真空・一様・非等方解として，次の形で与えられるカスナー解がある．

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2p_i}(dx^i)^2 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{d} p_i = \sum_{i=1}^{d} p_i^2 = 1 \quad (15)$$

p_iに対する制限(15)によって，少なくとも1つのp_iは負にならざるをえない．つまり，空間はある方向には膨張し，別の方向には収縮することを表している．

このカスナー解を，5次元KK理論に適用してみよう．3次元方向が等方的，つまり$p_1 = p_2 = p_3$と仮定すると，解は一意に決まり，$p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$, $p_5 = -1/2$，つまり

$$\begin{aligned} ds^2 \;=\; & -c^2dt^2 + (t/t_0)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ & + (t_0/t)\,dw^2 \end{aligned}$$

となる．$t = t_0$において4次元方向に同じように広がっていた空間が，3次元方向が膨張，1次元方向が収縮して現在の宇宙の姿になった，という解である．時空が11次元の場合も同様に，空間3次元が膨張し，残りの7次元が収縮する解が存在する．

より現実的な宇宙モデルを作るためには，真空ではなく，物質を入れたアインシュタイン方程式を解かなければならない．しかし，空間の一部が膨張し，一部が収縮するという性質は，かなり一般的な性質のようである．

念のために補足するが，計量(14)にはゲージ場A_μが入っておらず，KK理論の議論にはなっていないではないか，と疑問を持たれる方もおられるだろう．その疑問はもっともで，A_μの項を全く考えないのであれば，それはKK理論でもその他の統一理論でもない．しかし，実は式(9)のようにA_μが計量に含まれているが，その寄与は他の項に比べて小さいという状況を仮定すれば，上の議論は正当化されるのである．

このような高次元宇宙において，粒子生成，エントロピー生成，インフレーションなどの物理過程を考えると，様々な面白い性質が見られるが，本稿では余裕がないので割愛する．

7. 階層性問題と余空間

素粒子論の話に戻ろう．電磁気力と弱い力は$M_{EW} \sim 10^2$ GeVのエネルギースケールで統一されるが，重力が統一されるプランクスケール$M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeVとの間には17桁ものギャップがあり，これを階層性問題という．1997年にArkani-Hamedたちは，比較的大きな余空間を考えることにより，階層性問題が解決されるというアイディアを提案した．

従来の高次元理論では，クーロン力等すべての相互作用に関する実験事実から，余空間のサイズに厳しい制限がつけられてきた．しかし，もし余空間に伝搬する力が重力だけならば，余空間のサイズは重力の実験のみから制約を受ける．意外なことに，重力が$1/r^2$に比例することはセンチメートル程度のスケールまでしか確認されておらず，ミリメートルスケール程度の余空間が存在することも可能だというのである．

4次元時空（3次元空間）における重力ポテンシャルは，2質点の質量をm_1, m_2，距離をrと

すると，

$$V(r)=\frac{Gm_1m_2}{r}=\frac{m_1m_2}{M_{Pl}^2}\frac{1}{r} \tag{16}$$

書ける．$M_{Pl}\equiv\sqrt{\hbar c/G}$ はプランク質量であり，今以降，$\hbar=c=1$ の自然単位系を用いることにする．さて，時空が 4 次元より大きい 4+n 次元の場合，重力ポテンシャルはどのように修正されるだろうか．まず，力が $1/r^{n+1}$ に比例することは容易に理解されよう．更に，自然単位系では質量は (長さ)$^{-1}$ の次元になることに注意すると，質量の次元を持つパラメーター M によって

$$V(r)=\frac{m_1m_2}{M^{n+2}}\frac{1}{r^{n+1}} \tag{17}$$

と表される．

いま，余空間のサイズを R とすると，$r<R$ における重力は式 (17) で与えられ，$r>R$ では通常の法則 (16) が成り立つ．$r=R$ で 2 つの表式が一致しなければならないことから，

$$M_{Pl}^2=M^{n+2}R^n \tag{18}$$

という関係が得られる．この式は，ある質量スケール M を理論に導入すると，プランク質量 M_{Pl} が自動的に決まることを意味する．

余空間のサイズはどうなるだろうか．$M=M_{EW}$ とおくと，

$$R\sim10^{\frac{30}{n}-17}\text{cm}\times\left(\frac{10^3\,\text{GeV}}{M_{EW}}\right)^{1+\frac{2}{n}}$$

となる．$n=1$ の場合，$R\sim10^{13}$cm まで式 (17) が適用されることになるので，明らかに実験事実と矛盾する．ところが，$n=2$ (6 次元時空) の場合は $R\sim1$mm となり，これまでの重力実験とは矛盾しない．しかも，1 mm スケールでの重力は近い将来テストできると考えられる．

Arkani-Hamed たちのアイディアは面白い．しかし，$M_{EW}\sim10^3$ GeV と $M_{Pl}\sim10^{19}$ GeV の階層性問題は解決されたものの，$R^{-1}\sim(1\text{mm})^{-1}\sim10^{-4}$ eV という別のスケールを導入しており，階層性問題を置き換えているにすぎないと批判することもできる．1998 年には，Randall と Sundrum は別のモデルを提案した．5 次元時空として，負の宇宙項の存在する反ドジッター時空を考え，その中に 4 次元ミンコフスキー時空を埋め込んだ．計量は

$$ds^2=e^{-2kr_c|\phi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+r_c^2d\phi^2$$

で与えられる．余次元方向はサイズは r_c にコンパクト化され，座標 ϕ は $0\leq\phi\leq\pi$ の範囲を動く．すべての $\phi=$ 一定「面」は 4 次元ミンコフスキー時空に対応するが，$\phi=0$ と $\phi=\pi$ の 2 つの 4 次元時空にのみ物質が局在しているとし，それら 2 つの 4 次元時空を 3 ブレインと呼ぶ．そして，我々の世界は $\phi=\pi$ の 3 ブレインであると仮定する．k はアインシュタイン方程式から決まる定数で，5 次元時空の負の宇宙項を Λ，プランク質量を M とすると $k=\sqrt{-\Lambda/24M^3}$ となる．

このモデルでは，4 次元プランク質量は次のように求められる．

$$\begin{aligned}M_{Pl}^2&\equiv M^3r_c\int_{-\pi}^{\pi}d\phi e^{-2kr_c|\phi|}\\&=\frac{M^3}{k}(1-e^{-2kr_c\pi})\end{aligned}$$

この式は，M_{Pl} が r_c にほとんどよらないことを示しており，仮に $M\sim k$ とすれば $M_{Pl}\sim M$ となる．一方，我々の世界である $\phi=\pi$ の 3 ブレインにおける質量スケールには，計量の共形因子 $e^{-2kr_c\pi}$ がかかり，$m=Me^{-2kr_c\pi}$ となることが示されている．したがって，もし $kr_c\approx10$ と選べば $m\sim10^3$ GeV となり，電弱スケールが導かれたことになる．

ここでは 2 つのモデルを紹介したが，エネルギースケールの階層性問題を余空間によって解決しようとするアイディアは面白い．しかし，Arkani-Hamed たちのモデルが階層性問題の置き換えと言うのと同様に，Randall たちのモデルも r_c を丁度よく選ばなければならず，果たしてどれだけ問題が軽減されたと言えるのかは疑問である．また，そもそも 3 ブレインにすべての物質や重力以外の力を閉じこめることが可能なのか，明らかではない．

8. おわりに

冒頭で述べたように，余空間を考える動機は基本的には力の統一理論にある．統一理論を構築する上で，高次元時空を想定すると何かと都合がよいのである．

しかし，最近の研究では余空間を考える動機が多様化し，非専門家には（専門家でも）その意義が分かり難くなっている．例えば，前節で述べた 2 つのモデルは，エネルギースケールの階層性問題を解決することが動機になっているが，既に述べたように，本当に問題が解決されたと言えるのかどうかは疑問であるし，また，それだけの結果を導くために，重力だけが余空間を伝わるという仮定はあまりにも大胆であるという感が否めない．また，Randall たちは次に別のモデルを提案しているが，もはや階層性問題の解決という動機さえなくなっている．宇宙論研究でも，3 ブレインの研究が流行となっているが，明確な動機があるというよりは，余空間の存在が面白い宇宙論的帰結をもたらすことを期待して，色々調べているといったところだろう．

一方，カルツァとクラインの最初の理論が，現実の理論として成功していないにも関わらず，約 90 年間も輝きを失わずに語り継がれているのは驚異である．その理論の明快さ，美しさが多くの物理学者を引きつけ，このアイディアを基にした理論を作ろうという衝動にかき立てるのだろう．

真実はどうだろうか．近い将来，力の統一理論が完成する日は来るのだろうか．その日が来れば，カルツァ・クラインのアイディアが正しかったかどうか，我々の世界は結局何次元なのか，明らかになるだろう．

参考文献

1) カルツァ・クライン理論に関する論文集のみ挙げる．T. Applequist, A. Chodos and P.G.O. Freund: Modern Kaluza-Klein Theories, Addison-Wesley (1987).

（さかい・のぶゆき，山形大学教育学部）

曲がった時空上の場の量子論とフォック空間



佐々木　節

1. はじめに

自然界に存在する基本的相互作用のうち，電磁相互作用・弱い相互作用・強い相互作用の３つは場の量子論に基づく理論で非常によく実験データを再現することが知られている（電磁相互作用と弱い相互作用は電弱理論として統一されている）．また，重力相互作用も，その量子論はまだ完成していないが，古典的にはやはり場の理論で表されている．最近は重力も含む相互作用の統一理論として，超弦理論やＭ理論などと呼ばれる理論の研究が盛んであるが，これらの理論もその基本は場の量子論である．

また，こうした基本的相互作用以外でも，自然界には様々な「場」が存在しており，ほとんどの自然現象は（量子化の必要性こそないが）場の力学なしでは語れない．例えば天気予報でおなじみの気象図の気圧や風速分布は，それぞれ２次元面上のスカラー場，ベクトル場である．地球全体のグローバルな天気予報では，球面上の場の理論を展開しているわけである．

宇宙論に目を転じれば，初期宇宙に起こったとされる宇宙の急激な膨張，インフレーション宇宙は，宇宙の密度を支配するスカラー場（インフラトン場）の量子揺らぎによって，現在の宇宙の星や銀河などの構造のすべてが生まれたと考えられている．これは宇宙論的密度揺らぎの場の量子論，すなわち音波の量子論の帰結である．

本稿では，場の古典論から始めて場の概念を復習し，場の量子化がどのようになされるか，場の状態を記述するフォック空間とは何か，について紹介し，その後，そこに出現する多様な「真空」の意味について，特に曲がった時空上での場の理論を念頭にいくつかの例を挙げながら解説しつつ，場の理論における量子場の状態空間の１つの捉え方を紹介しようと思う．

2. 場の古典論

まず「場」の概念を復習しよう．簡単のために長さ R の１次元空間上の場の理論に注目する．そのためにまず N 個の力学変数 Q_i $(i=1,2,\cdots,N)$ の作用汎関数として次のようなものを考えよう．

$$S=\int dt\,L;$$

$$L=l\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\dot{Q}_i^2-C^2\frac{(Q_i-Q_{i-1})^2}{2l^2}-U(Q_i)\right)\qquad(1)$$

ここで，l や C は理論のパラメータである．この理論は，それぞれの Q_i が同じポテンシャル関数 $U(Q_i)$ を持ち，指標 i が互いに隣り合う Q_i 同士が相互作用する N 次元の力学系である．この系の特徴は，ある力学変数（例えば Q_i）が変動すると，それがまず隣接した力学変数（$Q_{i\pm1}$）に影響を与え，それがまたその隣の力学変数に影響す

る，というように順番に影響が伝わっていくようになっており，指標 j が i と大きく異なる力学変数 Q_j には Q_i の変動が直接伝わらないことである．係数 C^2 は，その隣接相互作用の強さを表す指標となっている．

ここで，空間を間隔 $l = R/N$ の格子に切って，Q_i の指標 i をその格子上の点 x_i に対応させる．すなわち Q_i を離散化された空間上の各点 x_i 上で定義された力学変数 $Q_i(t) = Q(x_i, t)$ と考える．この N 次元力学系で $l \to 0$ $(N \to \infty)$ の極限を取れば1次元空間上の（スカラー場 Q に対する）場の理論が得られる：

$$S = \int dt \int_R dx\,\mathcal{L};$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 - \frac{C^2}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 - U(Q). \qquad (2)$$

すなわち，場とは空間上の各点で定義された力学変数である．力学変数 Q_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を座標として，それらで張られる N 次元空間を配位空間というが，場の理論は無限次元の配位空間を持つ力学である．ただし，意味のある場の理論を導くためには，(1) 式で隣接する点同士の Q_i のみが相互作用するとしたように，元々の力学変数間の相互作用の形には強い制限がある．

(2) 式から導かれる Q の運動方程式（場の方程式）は

$$-\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + C^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - U'(Q) = 0$$

となる．ここで，ポテンシャル $U(Q)$ が無視できる極限を考えると，これは伝播速度が C で与えられる波動方程式となる．例えば，Q を気体密度の揺らぎ $\delta\rho$ とみなせば，上式は C を音速とする音波の波動方程式を与える．ポテンシャル $U(Q)$ が無視できない場合にも，C の意味は本質的に同じであり，波動の伝播速度の上限を与える．すなわち，物理的情報伝達速度が C で与えられる因果律が成り立っているのである．このように，場の理論の本質は波動理論である．

(2) 式の3次元空間への拡張は

$$S = \int dt \int_V d^3x\,\mathcal{L};$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 - \frac{C^2}{2}\sum_{i=1,2,3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x^i}\right)^2 - U(Q) \qquad (3)$$

である．ここで V は場が定義されている空間の体積である．特に，伝播速度 C が光速度に等しいとし，V が無限大の極限を考えると，この理論は平坦な4次元ミンコフスキー時空上のローレンツ不変な実スカラー場の理論となる．

もちろん，出発点の N 次元力学系に戻って，その理論のパラメータの一般化を考えれば明らかなように，(2) 式の拡張はこれだけではない．特に，曲がった時空上での場の理論を考えることもできる．その場合，場が局所的に一般座標変換に対して不変な意味を持つことを要請するのが自然である．すると (3) 式の $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu Q\partial_\nu Q - U(Q)\right) \qquad (4)$$

となる．ここで g は時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ の行列式，$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の反変成分（逆行列）である．また，簡単のため $C = 1$（光速度を1とする単位系）とした．

ここでは実スカラー場の理論を取り上げたが，電磁場などのベクトル場の理論も基本的に同様に構成することができる．一方，電子のように古典的には粒子描像のほうが適している場の場合にも古典的な場の理論を構成することは可能であるが，その物理的意味は余り鮮明ではない．以下では，最も簡単な場合として実スカラー場に注目して議論を進める．

3. 量子化とフォック空間

前節における場の古典論の議論から明らかなように，場を量子化することは，空間の各点で定義された場，すなわち力学変数を量子化することに他ならない．通常よく見かけるのは，まずその場

に対応する粒子の力学を量子化して，それをさらに無限粒子系に拡張し再度量子化する，という手続きである．そのため，場の量子化は第2量子化と呼ばれる．そして場の様々な物理状態（無限次元ヒルベルト空間）は，真空，1粒子状態，2粒子状態などの異なる粒子数を持つ状態（フォック空間）の直和として表される（フォック表現）．しかし，ここではそうした手続きを後回しにして，ラグランジアン密度が (4) 式で与えられるスカラー場 Q の量子化をまず形式的に考え，フォック空間は最後に構成する．これは，曲がった時空上では粒子の概念が物理的に曖昧になり「真空」が一意的に決まらなくなるため，粒子描像を最初から導入する意義がないからである．

(1) 式に与えた離散化された空間上の力学系の場合，量子化はその系をハミルトン形式に書き直した後，座標 Q_i とその正準運動量 P_i との間に正準交換関係を設定してなされる．こうした量子化を正準量子化という．場の理論の極限でも全く同様に正準量子化がなされる．

簡単のためポテンシャル $U(Q)$ を

$$U = \frac{1}{2}m^2Q^2 \qquad (m^2 > 0)$$

とする．これは Q がポテンシャルの極小値 $U(Q_0)$ の周りの微小な揺らぎを表す場合の一般形である．また後ほど具体的に示すように，この場合は，ミンコフスキー時空上での Q に対応する粒子は，相互作用をしない質量が m の自由粒子となる．

また，時空の計量に関しては

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{5}$$

で与えられる場合を考える．このとき場 Q に対する正準運動量 P は

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = \sqrt{h}\,\dot{Q}$$

で定義される．ここで h は h_{ij} の行列式を表す．これよりハミルトニアンは

$$H = \int_V d^3x\,\mathcal{H};$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= P\dot{Q} - \mathcal{L} \\ &= \frac{P^2}{2\sqrt{h}} + \frac{\sqrt{h}}{2}h^{ij}\partial_i Q \partial_j Q + \sqrt{h}U(Q)\end{aligned}$$

となる．

離散化された空間の場合の正準交換関係は

$$[Q_i(t), P_j(t)] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

である．ここで Q_i, P_i は系の物理的状態を表す空間（ヒルベルト空間）に作用する演算子（オブザーバブル）であり，[,] はディラック括弧と呼ばれ，そうした演算子間の代数を決める．この連続極限を考えると

$$[Q(\boldsymbol{x}, t), P(\boldsymbol{y}, t)] = i\hbar\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{6}$$

となる．Q, P に対するハイゼンベルク方程式は

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{1}{i\hbar}[Q, H] = \frac{P}{\sqrt{h}}, \\ \dot{P} &= \frac{1}{i\hbar}[P, H] = \partial_i(\sqrt{h}h^{ij}\partial_j Q) - \sqrt{h}\,m^2 Q\end{aligned}$$

である．これは場の方程式

$$-\nabla^\mu \nabla_\mu Q + m^2 Q = 0 \tag{7}$$

を与える．ここで ∇_μ は計量 $g_{\mu\nu}$ についての共変微分である．

さて，以上で形式的に量子化ができたわけであるが，これだけでは肝心の場の物理状態を表す空間が具体的に見えてこない．そこで，フォック表現が役に立つことになるが，それを構成するために，一旦古典論に戻って，場の方程式 (7) の任意の複素古典解の対 Q_1, Q_2 に対して，クライン・ゴルドン内積と呼ばれる以下の量を定義する：

$$(Q_1, Q_2) = -i\int_{V(t)} d^3x\,\sqrt{h} \times \left(Q_1\dot{Q}_2^* - \dot{Q}_1 Q_2^*\right). \tag{8}$$

ここで $V(t)$ は時刻 t の空間体積である[*1]．また Q^* は Q の複素共役を表す．Q_1, Q_2 が場の方程式の解であれば，これが時間に依存しないことが

*1) ここでは空間的にコンパクトな時空を考えているが，そうでない場合への拡張も適当な条件の下で可能である．

ガウスの定理を使うとわかる．

クライン・ゴルドン内積は，そのままでは正定値の「内積」にはなっていないが，それが正定値となるような解に解空間を限ることができる．それらを正振動数解という．反対に負定値となる解を負振動数解という．場の方程式が初期値問題として正常に解ける理論のとき，任意の正振動数解を構成する完全系が存在することが知られており，それらの完全系を正振動数モード関数（あるいは単にモード関数）という．場の方程式の任意の解は正振動数解と負振動数解の重ね合わせで構成される．

ただし，これらの正，負振動数解の解空間はユニークではない．平坦なミンコフスキー時空では，時空の時間推進に対する不変性から，クライン・ゴルドン内積の正定値性に加えて，その解が

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u = \hbar\omega\, u\,, \quad \omega > 0$$

を満たす，という本来の「正振動数条件」を課すと，（空間座標に関する部分を除いて）ユニークに

$$u_{\boldsymbol{k}} = \frac{e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot x}}{\sqrt{2\omega}}\,; \quad \omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$$

となる解が選ばれる（この解が第2量子化以前の1粒子波動関数に対応する）．しかし，一般の時空には時間推進対称性は存在せず，したがって正振動数解はユニークでなくなる．これが「1粒子の量子力学を第2量子化する」ことの意味がなくなる所以である．

いま任意に選んだ正振動数モード関数の完全系 u_n を考えると

$$(u_n, u_m) = \delta_{nm}\,,$$
$$(u_n, u_m^*) = 0\,, \quad (u_n^*, u_m^*) = -\delta_{nm} \qquad (9)$$

が成り立つ．そしてモード関数の完全性は，u_n の正準運動量に対応するものを p_n ($p_n = \sqrt{\hbar}\dot{u}_n$) として，それらの間の時刻 $t =$ 一定における関係，

$$\sum_n \{u_n(x)p_n^*(y) - u_n^*(x)p_n(y)\} = i\,\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

として表される[*2)]．このとき，任意の実古典解 Q とその正準運動量 P は

$$Q(x) = \sum_n \{a_n\, u_n(x) + a_n^*\, u_n^*(x)\}\,,$$
$$P(x) = \sum_n \{a_n\, p_n(x) + a_n^*\, p_n^*(x)\}$$

と分解される．ここで

$$a_n = (Q, u_n), \quad a_n^* = (Q, u_n^*)$$

である．

さて，ここで場を量子化して上の式の Q, P を演算子とみなす．すなわち，a_n を演算子とみなし a_n^* はそのエルミート共役演算子 ($a_n^\dagger$) とみなす．すると，正準交換関係 (6) は a_n, $a_n^\dagger$ の交換関係

$$[a_n\,, a_m^\dagger] = \hbar\,\delta_{nm}\,,$$
$$[a_n\,, a_m] = [a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0$$

と等価になる．ここで「真空」を a_n によって消滅される状態

$$a_n|0\rangle_a = 0\,,$$

として定義すると，$|0\rangle_a$ に $a_n^\dagger$ を1つ掛けたものが1粒子状態，2つ掛けたものが2粒子状態，というようにしてフォック空間が構成される．a_n, $a_n^\dagger$ はそれぞれ消滅，生成演算子という．N 粒子状態 $(a_n^\dagger)^N|0\rangle_a$ は演算子 $a_n^\dagger a_n$ の固有値 N を持つ固有状態であり，$a_n^\dagger a_n$ を粒子数演算子という．

以上で，量子場のハイゼンベルク表示による記述が得られたわけである．しかし，既に述べたように，正振動数解はユニークではない．ということは，真空もユニークではないのである．そのため「粒子」の概念も曖昧になっており，真空とか1粒子状態とかをナイーブな粒子描像に基づいて解釈するべきではない．「粒子」という言葉を使うときには，それが何を意味するかに十分注意して使うべきである．特に「真空」は，あるクラスの場の状態のうちの一つ，というように捉えるべきである[*3)]．

*2) 以下，簡単のため $Q(\boldsymbol{x}, t) = Q(x)$ などと表す．
*3) ここでは具体的に示さないが，シュレーディンガー表示で考えると，真空は一般にガウシアン的波動汎関数で表される．

4. ボゴリューボフ変換

前節で見たように，場の「真空」状態はユニークではない．では，異なる真空同士はどのような関係にあるのであろうか．いま 2 つのモード関数の組 $\{u_n\}$ と $\{v_n\}$ を考えよう．それらは

$$u_n = \sum_m (\alpha_{nm} v_m + \beta_{nm} v_m^*)$$

なる線形関係で結ばれているはずである．ここで，$\{u_n\}$, $\{v_n\}$ の両方が共に (9) 式を満たすことから，係数 α_{nm}, β_{nm} は

$$\sum_m (\alpha_{nm}\alpha_{n'm}^* - \beta_{nm}\beta_{n'm}^*) = \delta_{nn'} ,$$
$$\sum_m (\alpha_{nm}\beta_{n'm} - \beta_{nm}\alpha_{n'm}) = 0$$

を満たすことがわかる．また，$\{u_n\}$, $\{v_n\}$ に付随する消滅演算子をそれぞれ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ とすると，

$$a_n = \sum_m \left(\alpha_{nm}^* b_m - \beta_{nm}^* b_m^\dagger\right) \qquad (10)$$

を得る．この変換をボゴリューボフ変換といい，α_{nm}, β_{nm} をボゴリューボフ係数という．

消滅演算子 b_n に対する真空 $|0\rangle_b$ で演算子 $a_n^\dagger a_n$ の期待値を計算すると (10) 式より

$${}_b\langle 0|a_n^\dagger a_n|0\rangle_b = \sum_m |\beta_{nm}|^2 \qquad (11)$$

を得る．すなわち，b_n で定義された真空 $|0\rangle_b$ は，a_n による粒子の定義では粒子数の期待値が $\sum_m |\beta_{nm}|^2$ 個の状態に見えるわけである．

曲がった時空上のボゴリューボフ変換のよく知られた例に，宇宙膨張による粒子生成がある[1]．これは，宇宙初期において，場がその時期の自然な真空（これを $|0\rangle_b$ とする）にあったとしても，現在の宇宙における自然な真空を $|0\rangle_a$ として，それが $|0\rangle_b$ と異なるとき，現在は (11) 式で与えられるだけの粒子が存在している，すなわち，宇宙膨張によって粒子生成が起こった，というものである．

しかし，この場合に注意しなければならないのは「何が観測量か」という点である．たとえ現在の自然な真空が $|0\rangle_a$ であったとしても，それがすぐに $a_n^\dagger a_n$ が観測量であることを意味はしない．実際，上で考察した量子場のハイゼンベルク表示では，場の演算子 $Q(x)$ が時間発展する代わりに，場の状態は変化せず，初期の真空 $|0\rangle_b$ に留まっている．そこで，例えば場のエネルギー運動量テンソルのような，$Q(x)$ から構成される時空座標に関して共変的な物理量を考えると，（平坦な時空でも起こる紫外発散の問題を別にして）その期待値は状態 $|0\rangle_b$ のみに依存しており，その値は，現在の自然な真空 $|0\rangle_a$ がどのようなものであるかとは，少なくとも直接的には無関係である．このような場合，ボゴリューボフ変換に基づく粒子生成の描像は，そこで起こっている現象の理解の手助けになることはあっても，本質的理解には不必要である．場合によっては誤解の元ともなり得る．

具体例として，初めに触れた「インフレーション宇宙におけるインフラトン場の量子揺らぎ」の問題を考えよう．すなわちインフラトン場の揺らぎ $\delta\phi$ を Q とする．インフレーションが十分長い時間起こると，場はその初期状態がいかなるものでも，最終的には「ドジッター不変真空」と呼ばれる状態にあると近似してよいことが知られている．指数関数的に膨張するインフレーション宇宙はドジッター時空で表されるが，ドジッター時空はミンコフスキー時空におけるポアンカレ対称性と同様の非常に高い対称性（ドジッター対称性）を持つ時空であり，「ドジッター不変真空」は，ドジッター対称性の変換に関して不変な真空である[2]．

ドジッター時空の計量は (5) 式で

$$h_{ij} = a^2(t)\,\delta_{ij}\,; \quad a(t) = e^{Ht}$$

として与えられる．ここで H はドジッター宇宙の膨張率である．インフラトン場の有効質量 m は H に比べて十分に小さいことがわかっており，そのときドジッター不変真空に対する正振動数解は

$$u_{\boldsymbol{k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(-i + \frac{k}{Ha}\right) e^{-i\int k dt/a} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

となる．この解の特徴は，十分初期（$a \to 0$）には，宇宙のスケール因子依存性を除いて平坦な時

空の質量ゼロ（$m=0$）のスカラー場の正振動数解と同じ振る舞いをするが，十分時間が経った後（$a\to\infty$）には $u_{\boldsymbol{k}}\propto k^{-3/2}$ となって，時間的振動が止まり，k の小さいところで（すなわち長さのスケールが大きいところで）振幅が非常に大きくなる点である．

さて，インフラトン場の揺らぎは，宇宙の密度揺らぎを引き起こす重力ポテンシャルの揺らぎ Ψ に比例することが知られている[3]．よって，上で示したモード関数 $u_{\boldsymbol{k}}$ の振る舞いから，重力ポテンシャルの空間的2点相関関数は

$$\langle\Psi(x)\Psi(y)\rangle\propto\langle\delta\phi(x)\delta\phi(y)\rangle\propto\int\frac{dk}{k}\frac{\sin kr}{kr}$$

と振る舞うことがわかる．ここで $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ であり，$\langle\cdots\rangle$ はドジッター不変真空についての期待値である．こうして $r\to 0$ で対数発散する相関関数が得られるが，これは r の非常に大きいところ，すなわち宇宙論的な空間スケールで揺らぎが無視できないことを意味している．これが，インフラトン場の量子揺らぎが宇宙の密度揺らぎを生む原因である．

上の計算でわかるように，物理量（上の例では重力ポテンシャル）の評価には，粒子生成の概念は一切必要なかった．というより，我々が知りたいのは，重力ポテンシャル場 $\Psi(x)$ の場としての振る舞いであり，粒子描像は全く役に立たない．これは，宇宙論で考えているスケールが10億光年とか100億光年とかいう空間スケールであることを考えれば明らかである．波長が10億光年の粒子を観測する，という考え方の無意味さは言うまでもない．

一方，粒子描像がそれなりに役に立つ状況もないではない．始状態や終状態が定義される時空領域が平坦な時空のときなどがそうである．この場合，単に自然な真空があいまいさなく決まるだけでなく，平坦な時空の曲率が無限大であることから（あるいは特徴的長さが存在しないため），任意の波長は十分に短いとみなすことができ，粒子描像が意味を持つからである．ここでは，残念ながら触れる余裕はないが，有名なブラックホールからのホーキング輻射の議論では，ブラックホールから十分に遠方にいる観測者にとっては時空は十分に平坦であり，ブラックホール形成後に無限遠に放出される粒子フラックスという概念は，十分に意味を持つ．しかし，この場合でもブラックホールの事象の地平面近傍においては，粒子の概念はやはり曖昧なものとなり，どのような観測者を考えるかによって，その意味するところは大きく異なってしまう．結局，飽くまで「ある量子状態の場」として捉えれば必要にして十分である，ということになる．

■ 5. 終わりに ■

この小文では，場の量子状態のフォック表現における，普段はあまり意識されていない（かもしれない）「真空」の多様性を曲がった時空上の場の量子論に基づいて解説した．真空の多様性から得られる教訓は，場を粒子の集まりとしてではなく，場としてそのまま理解することの大切さである．

実は，ここで紹介したフォック真空の多様性と非常に似通ったことは，超伝導や超流動などの場の相転移現象の記述に現れる．というより，そちらが本家本元である[4]．曲がった時空上の場の理論との違いは，相転移現象においては，温度などの外的パラメータを決めると，それに従ってどの真空が真の基底状態かが明確に決まる，という点である．この意味で，基底状態からの場の励起を粒子として捉えるのに問題はないが，相転移後の基底状態を相転移前の基底状態に基づいた粒子描像で理解しようとするのは無駄なことである．これは全くの個人的偏見であるが，相転移現象の理解においても粒子描像への固執は（ファインマン図に基づく計算のような技術的手法としての粒子描像の有用性を除いて）理解の妨げとなる危険があると感じている．

さらに，ここでは全く触れることができなかったが，偽の真空崩壊という真空の一次相転移現象の記述においては，時間をユークリッド化した場の非自明な古典解の集合が，配位空間の中で集団座

標的な特別な役割を果たす，という場面もある[5]．この場合には，場の配位空間における状態のシュレーディンガー表示（波動汎関数表示）を求めることが重要となる．すなわち，粒子描像は意味をなくし，場の配位そのものが問題となるわけである．

ここで述べた内容は，多分に独善的であり，必ずしも正確ではない点もあるかもしれないが，場の理論の基本は「場は場として理解する」ことにある，というメッセージが少しでも伝われば幸いである．

参考文献

1) N.D. Birrell & P.C.W. Davies, "Quantum fields in curved space" (Cambridge University Press, 1982).
2) B. Allen, *Phys. Rev.* D**37**, 2078 (1988).
3) A. Linde, "Particle Physics and Inflationary Cosmology" (Harwood Academic Publ., 1990).
4) 高橋　康, "物性研究者のための場の量子論 I, II" (培風館, 1974).
5) T. Vachaspati & A. Vilenkin, *Phys. Rev.* D**43**, 3846 (1991).

（ささき・みさお，大阪大学大学院理学研究科）

空間の量子論

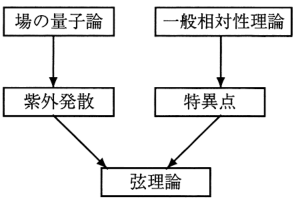


早田　次郎

1. はじめに

空間は物理現象の舞台としての役割を果たしている．実際，空間上では絶えず様々な素粒子の生成消滅，衝突，崩壊がそれこそひっきりなしに起こっている．しかし，空間そのものを物理的対象として研究するということは一般相対性理論以前にはなかった．ところが20世紀になって一般相対性理論が発見され，空間が力学的対象として科学の表舞台に登場すると事情が違ってきた．ハッブルによる宇宙膨張則の発見は現代的な宇宙論の幕を開けたという以上に，空間が力学的なものであるという認識を確立したという意味で重大な発見であった．今まで舞台にすぎなかった空間が宇宙における物理現象において積極的な役割を担っていることが明らかになり，空間，重力そして宇宙を総合的に理解する必要性が認識されるに至っている．

20世紀の物理学上の最大の発見は一般相対性理論と量子力学，それに続く場の量子論であった．皮肉なことにこの2大発見はいまだに互いに歩みよってはいない．量子重力理論と呼べるものがないのである．実は，それぞれの理論はそれ自身大きな問題を抱えている．場の量子論には紫外発散という特異性がある．これは繰り込みという操作で回避されてはいるものの，完全に満足のいく回答とは思えない．とくに重力理論が繰り込み可能ではないというのは大きな問題である．他方，一般相対性理論にはブラックホールの特異点や宇宙の始まりの特異点などでよく知られているように，時空の特異点というやっかいなものが存在することが証明されている．この2つの困難は空間を量子化することで解決すると期待されている．今のところ，この方向性で最も有望な理論が超弦理論である．



もちろん，超弦理論以外の方法でも困難の解決法は模索されてきた．

一般相対性理論における特異点の存在は重力場の量子化の必要性を示唆している．量子化の方法としては正準量子化が宇宙論では最もポピュラーで，量子宇宙論の基礎になっている．これは3次元空間の計量場の量子化という意味で，(リーマン)多様体動力学の量子化と言える[1]．ビッグバン特異点の解消は量子宇宙論の最大の成果であった．

ミンコフスキー空間上の場の量子論の紫外発散の問題を解決するためには理論に自然な切断を導入する必要がある．コンヌの非可換幾何学はこの

流れに沿ったものとみなしてよい[2)]．これが空間の量子論と呼ぶべきものであるかどうかは問わない．ここで量子論というのは必ずしも文字どおりの量子論ではない，既存の理論ではないという程度の意味であると思っていただきたい．これを標語的に空間構造の量子化と呼ぼう．

これら関係の深い2つの問題がどこでどうつながるのかが空間概念を理解するひとつの鍵になっている．空間といえばリーマン幾何学であり，空間の量子論とは計量場としての重力場の量子化のことであるという認識が一般的である．しかし，一般相対性理論以前には空間と重力理論の結びつきは必然的なものではなかった．そもそも，空間が連続多様体として記述されなければいけない理由などない．空間を離散的あるいは非局所的にとらえようという考えは昔からある．しかし，この空間構造の量子化と多様体動力学の量子化が無関係かというとそうとも言い切れない．ミンコフスキー空間上のスピン2の場の理論は低エネルギーでは一般相対性理論となることが知られているからである．したがって，空間構造の何らかの意味での量子化は必然的に多様体の量子論としての重力の量子論と結びつくことになる．例えば非可換ミンコフスキー空間上のスピン2の場の量子論として首尾一貫した理論がアインシュタインの理論の非可換化になると予想される．

超弦理論は紫外発散問題を局所性を排除することで回避している．このことが，空間の非可換性や最小の長さの存在へとつながっている．さらに，幸いなことに超弦理論には必然的に重力理論が含まれている．したがって，多様体動力学の量子化といった側面も合わせ持つ．超弦理論は，空間構造の量子化と多様体動力学の量子化をうまく融合させた理論とみることができる．これらは時空特異点の問題が超弦理論の枠組みの中で解決されると期待する根拠となっている．

ここでは主に時空特異点の解消という立場から空間の量子論を眺める．まず多様体動力学の量子化としての量子重力理論，特に宇宙論への応用を解説する．虚数時間を導入し，通常の時空概念を否定することでビッグバン特異点が解消されることをみる．次に空間構造の量子化としての非可換幾何学，それと関連の深い高エネルギー宇宙線の話題を紹介する．空間構造の量子化が，宇宙という舞台では顕現する可能性があるということは注目に値する．後半は弦理論の立場から宇宙の初期特異点，ブラックホールの裸の特異点，ブレイン宇宙論について考察し空間の量子論のイメージをひろげていきたい．

2. 多様体動力学の量子化

場の量子論によって物質には常にある種の揺らぎが伴うものであるということが明らかになった．空間が動的なものである以上それも揺らぐと考えるのはごく自然なことであろう．とくにアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$

では左辺が空間の曲がり具合を右辺が物質のエネルギーを表しているのであるから物質の揺らぎが何らかの方法で空間に反映しているはずである．

物質の量子揺らぎがアインシュタイン方程式を通じて与える重力場の揺らぎは，不確定性原理と簡単な次元解析から

$$\delta g \sim \frac{l_{pl}^2}{l^2} \tag{2}$$

のように見積もることができる．ここで l は着目している揺らぎのスケール，$l_{pl} = 10^{-33}\,\mathrm{cm}$ はプランク長と呼ばれている長さのスケールである．このぐらい小さなスケールでは重力場の量子効果が無視できなくなってくる．このようなことが問題となるような現象は，宇宙初期のビッグバン特異点，ブラックホールというところである．これらは両方とも時空の曲率が大きいという意味で重力の強いところでの現象だということができる．ウィーラーは，平坦な空間でもプランクスケールくらいのスケールでみると激しく時空が揺らいでいると主張して，これに時空泡という名前をつけている．この描像は空間構造の量子化に関係して

いる．

量子重力理論に対する最も伝統的なアプローチはアインシュタイン作用の正準量子化である．正準理論をつくるためには時空を3次元空間が時間変化したものとしてとらえる必要がある．今，時空を空間的超曲面で埋め尽くし，その超曲面をパラメトライズする時間座標を t，超曲面上の座標を $\{x^i\}$ とすると時空の計量は

$$ds^2=-N^2dt^2+h_{ij}(dx^i+N^idt)(dx^j+N^jdt) \tag{3}$$

と与えられる．ここでラプス関数 N は時間の進み方を決める量で，シフトベクトル N^i は空間座標の張り方を決定する．この計量を使って作用を計算すると

$$S=\int d^4x[\pi^{ij}\dot{h}_{ij} -NH(\pi^{ij},h_{ij})-N^iH_i(\pi^{ij},h_{ij})] \tag{4}$$

となる．ここで，π^{ij} は h_{ij} の共役運動量，H と H_i は π^{ij}, h_{ij} の関数である．重要なのはラプス関数とシフトベクトルがラグランジュ係数になっている点である．ラプス関数の変分からでてくる拘束条件はハミルトン拘束条件，シフトベクトルの変分からでてくる拘束条件は運動量拘束条件と呼ばれる．

ディラックに従って正準量子化を行う．つまり

$$\pi^{ij}\Rightarrow -i\hbar\frac{\delta}{\delta h_{ij}} \tag{5}$$

と置き換えればよい．この系はハミルトン関数がゼロなので，拘束条件のみで波動関数が決定される．運動量拘束条件は単に波動関数が超空間上の汎関数であることを意味している．超空間とは3次元計量の全体がなす空間を空間座標の変換のもとで移ることのできる計量を同一視することによって得られる空間

$$\{h_{ij}/\text{微分同相写像}\}\equiv\mathcal{G} \tag{6}$$

である（超対称性とは全く無関係である）．

この空間上の波動関数を求めることが問題となる．それはハミルトン拘束条件を課すことで実現でき，ウィーラー・ドウィット方程式と呼ばれている．すなわち

$$H\left[-i\hbar\frac{\delta}{\delta h_{ij}},\ h_{ij}\right]\Psi[\mathcal{G}]=0 \tag{7}$$

である．この方程式は双曲型の方程式であることが知られている．この方程式の形式解は経路積分

$$\Psi[\mathcal{G}]=\int Dg_{\mu\nu}\exp\left(iS[g_{\mu\nu}]\right) \tag{8}$$

によって与えられる．この定式化を使ってビッグバン特異点が解消されるかどうかが知りたい点である．宇宙創生に関するハートルとホーキングの波動関数は計量場をユークリッド化した後，境界条件として，境界のない多様体のみについて積分を実行して求まる．こうして得られた波動関数のWKB解釈より，無からの宇宙の創世という描像が得られることになった．それによると，宇宙はあるとき有限の大きさを持って生まれる．“それ以前”は虚数時間の世界であり，そこには普通の意味での時間は流れていない．そのためにビッグバン特異点は解消されている．

3. 空間構造の量子化

空間構造の量子化は必然的にローレンツ不変性の破れと関連し，超高エネルギー宇宙線の問題との関連で興味深い．例としては，アシュテカー変数を出発点とするスピンネットワーク理論がある．他には最近よく研究されているものとして弦理論のB場の期待値と関連し[3)]，

$$[\hat{x}^\mu,\hat{x}^\nu]=i\theta^{\mu\nu} \tag{9}$$

という交換関係で定義される非可換幾何学がある．この関係は通常の時空上に非可換積

$$f(x)*g(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial}{\partial\eta^\nu}}f(x+\xi)g(x+\eta)|_{\xi=\eta=0} \tag{10}$$

を導入することで実現できる．実際，

$$x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu = i\theta^{\mu\nu} \tag{11}$$

を確かめることはやさしい．この積の定義から明らかなように非可換性と非局所性は結びついている．

このように，理論的な研究はここ数年でかなり進歩した．よく言われることであるが量子重力理論には実験的なよりどころがあまりない．現在のところ最も注目されているのが，超高エネルギー宇宙線の閾値，GZK 切断，のパラドックスである．エネルギーが 10^{20}eV を越えるような陽子は宇宙背景輻射との相互作用によってパイ中間子をつくりだすことで急速にエネルギーを失い閾値以内のエネルギーの陽子になるはずである．にもかかわらず，10^{20}eV を越えるような陽子は観測されている．これがパラドックスである．

このパラドックスの一つの解決方法がローレンツ不変性の破れを許すことである[4]．現象論的には物質ごとに違う最高到達速度が存在するとするもの，分散関係の変更などがある．例えば分散関係が

$$E^2 = p^2 + m^2 + \zeta \left(\frac{E}{E_{pl}}\right)^\alpha p^2 \tag{12}$$

というふうに変更されたとしよう．ここで $E_{pl} = 10^{18}$GeV はプランクエネルギー，ζ と α は現象論的パラメータである．E/E_{pl} は一般に非常に小さい．面白い点は，この小さな補正が特殊な状況下では有意に効いてくるのである．高エネルギーの陽子が宇宙空間を飛んでいくとき 2.7K の宇宙背景輻射と相互作用しパイ中間子をつくりだす．この反応に必要なエネルギー閾値は

$$\begin{aligned} p_{1,th} = & \frac{(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2}{4\epsilon} \\ & + \zeta \frac{p_{1,th}^{2+\alpha}}{4\epsilon E_{pl}^\alpha}\left(\frac{m_p^{1+\alpha} m_\pi^{1+\alpha}}{(m_p + m_\pi)^{1+\alpha}} - 1\right) \end{aligned} \tag{13}$$

と与えられる[5]．ここで m_p は陽子の質量，m_π はパイ中間子の質量，ϵ は光子のエネルギーである．$p_{1,th}/E_{pl}$ は非常に小さいのであるが $p_{1,th}/\epsilon$ は非常に大きいので補正項は効いてくる．パラメータを適当に取れば，他の実験事実と矛盾することなくパラドックスは解決できる．このようにローレンツ不変性の小さな破れが宇宙というマクロな世界ではみえてくる可能性がある．もしその破れが空間の量子論に帰因するとすれば，宇宙線を通して空間構造をみることになる．

このような現象論的な話と関係する空間の量子論の例をあげておこう．ポアンカレ代数の量子変形として κ ポアンカレ代数

$$\begin{aligned} & [M_{\mu\nu}, M_{\rho\tau}] \\ & = i(\eta_{\mu\tau} M_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\tau} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\tau} - \eta_{\nu\tau} M_{\mu\rho}) \\ & [M_i, k_j] = i\epsilon_{ijk} k_k \, , \ [M_i, \omega] = 0 \\ & [N_i, k_j] \\ & = i\delta_{ij}\left(\frac{\kappa}{2}(1 - e^{-2\omega/\kappa}) + \frac{1}{2\kappa} k_k k_k\right) - \frac{i}{\kappa} k_i k_j \\ & [N_i, \omega] = i k_i \\ & [P_\mu, P_\nu] = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

を考察しよう．ここで，$P_\mu = (\omega, k_i), M_k = \epsilon_{kij} M_{ij}/2, M_{0i} = N_i$ などはそれぞれ並進，回転，ブーストに対応した代数の生成子である．この代数が作用する時空はミンコフスキー空間の量子変形とみなせて，κ ミンコフスキー空間と呼ばれている．κ ミンコフスキー時空は非可換幾何学の例として興味深い．これをみるためには，ブースト変換の生成子を具体的に

$$\begin{aligned} N_i = & \, i k_i \frac{\partial}{\partial \omega} \\ & + i\left(\frac{1}{2\kappa} k_m k_m + \frac{\kappa}{2}(1 - e^{-2\omega/\kappa})\right)\frac{\partial}{\partial k_i} \\ & - \frac{i}{\kappa} k_i k_m \frac{\partial}{\partial k_m} \end{aligned} \tag{15}$$

と書き下してみるとよい．この群のカシミール演算子から分散関係は決まるが，ブースト変換の形から不変な分散関係が

$$\kappa^2 [e^{\omega/\kappa} + e^{-\omega/\kappa}] - k_m k_m e^{\omega/\kappa} = m^2 \tag{16}$$

と得られる．平面波

$$e^{ik_m x_m} e^{i\omega t} \tag{17}$$

で表現をつくろう．分散関係より逆は $(k_m, \omega)^{-1} = (-k_m e^{-\omega/\kappa}, -\omega)$ のように読みとれる．つまり，

$$1 = e^{ik_m x_m} e^{i\omega t} e^{-ik_m e^{-\omega/\kappa} x_m} e^{-i\omega t} \tag{18}$$

が成立していなければならない．κ が無限大，すなわち通常のポアンカレ代数の場合には自明に成立している．今の場合は

$$[x^i, t] = \frac{i}{\kappa} x^i \tag{19}$$

というような非可換性を導入する必要がある[6]．これは，最初に紹介したものとは違った非可換幾何学の例になっている．一方，分散関係は近似的に

$$\omega^2 \sim k^2 + m^2 - \left(\frac{\omega}{\kappa}\right) k^2 \tag{20}$$

となる．先の現象論の場合でいうと，κ をプランクエネルギーと同一視するならば，$\zeta = -1$, $\alpha = 1$ の場合に対応する．

このように，一般的に非可換幾何学はローレンツ不変性の破れを引き起こす．ローレンツ不変性に関しては様々な実験的な拘束が存在し非可換幾何学に対する制限を与えている[7]．

4. 弦理論と空間

まず，弦理論の理論的な枠組みを簡単に復習しておく[8]．背景時空を伝播していく弦の作用は

$$S = \frac{1}{4\pi l_s^2} \int d^2x \sqrt{-h} G_{\mu\nu} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \tag{21}$$

で与えられる．ここで $G_{\mu\nu}$ は背景時空の計量，h_{ab} は弦がはく世界面上の計量，X^μ は弦の位置座標，l_s は弦の長さのスケールである．平坦な時空上を伝播する場合の弦の量子化はよく知られていて，閉弦の場合重力子のモードが存在する．つまり，重力の出所は量子化されたときのモードとしてと，背景場としての計量の 2 箇所ということになる．これらは無関係ではなく無矛盾な理論であるためには背景場がある方程式を満たさなければならないことがわかる．これが低エネルギーではアインシュタイン方程式になることが知られている．

このように弦理論は一般相対性理論を含むのであるが，違う点がいくつか存在する．まず，背景場としては計量場以外に，弦の相互作用の強さと関係したディラトンや非可換幾何学と結びつく B 場，そして D ブレインと結合するラモン–ラモン反対称テンソル場などの多様な場が存在する点，そして 10 次元で理論が定義されていることなどが挙げられる．超弦理論のモデルとしてはタイプ I, タイプ IIA, タイプ IIB, $SO(32)$ ヘテロティック，$E_8 \times E_8$ ヘテロティックの 5 種類が知られている．例えば，タイプ IIA の低エネルギー有効作用は

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-G} \times \left[e^{-\phi} \left(R + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{12} H^2 \right) - \frac{1}{4} F_2^2 - \frac{1}{48} F_4^2 \right] \tag{22}$$

のように与えられる．ここで，$H = dB, F_2 = dC_1, F_4 = dC_3$ などである．他の超弦理論のモデルについても同様な作用を書くことができる．さらに，これらの間には T 双対性などのリーマン多様体理論にはない性質があり，互いに結びついている．最近の大きな発展は D ブレインと呼ばれるソリトン解が発見されたことである．Dp ブレインの低エネルギー有効作用であるボルン・インフェルト作用は B 場とゲージ場をゼロとおくと

$$S_{BI} = -T_p \int d^{p+1}\sigma e^{-\phi} \sqrt{-\det(G_{ab})} + \mu_p \int C_{p+1} \tag{23}$$

と与えられる．ここで T_p と μ_p はブレインの張力と電荷である

4.1 プレビッグバン宇宙

弦理論の宇宙論への応用として，ヴェネツィアノによってプレビッグバン理論が提唱された[9]．一様等方な宇宙

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{24}$$

に対して弦の有効作用の計量とディラトンの部分は

$$S = \int dte^{-\phi}a^3 \left[6\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \dot{\phi}^2\right] \tag{25}$$

と与えられる．これからフリードマン宇宙的解

$$a(t) \sim t^{1/\sqrt{3}} \tag{26}$$

が得られる．時刻 $t=0$ で宇宙の大きさがゼロになり特異点が発生する．これは，多様体動力学の量子化で議論したビッグバン特異点である．この特異点の解消は弦理論の枠組みでは如何になされるのか．鍵は，この作用に T 双対性の反映として次のような変換

$$a \to \frac{1}{a}, \quad \phi \to \phi - 6\log a \tag{27}$$

に対する対称性が存在するという事実にある．この対称性のためにフリードマン宇宙には常にそれに双対な別の宇宙（プレビッグバン宇宙）

$$a(t) \sim (-t)^{-1/\sqrt{3}} \tag{28}$$

が対応する．この解は急速に加速膨張する宇宙を表していて通常の指数関数的インフレーションモデルと同様に様々な宇宙論的問題の解決法を与える．これらの解はあくまで弦の低エネルギー有効理論の解であり，弦理論の古典解ではない．時刻0では，フリードマンの場合大きさはゼロになっていて，フリードマンに双対な場合は無限大の大きさになっている．その両方ともこの時刻で特異点を持っている．特異点では有効理論はもはや信頼できないので，弦理論にもどって考察すべきである．しかし，T 双対性は弦理論でも成立している対称性である．ヴェネツィアノのアイデアは弦理論の古典解ではこの二つの解が特異点付近で対応しているというものであった．すなわち，弦の古典解においては特異点は存在せず，プレビッグバン宇宙からフリードマン宇宙へとつながっている．もちろん，ここでどういうふうに対応するのかをきちんと示さなければいけないのだが，それは今のところわかっていない．

このモデルの売りはプレビッグバンの時期に必ずインフレーションが起きているという点にある．プレビッグバン宇宙はミンコフスキー時空から始まり，インフレーションを経て，我々の宇宙へとつながるという描像で，量子宇宙論とは違った宇宙初期の描像を与えている．興味深いことにこれと似た描像がブレイン宇宙理論からも示唆されている．

4.2 裸の特異点とエンハンソン機構

最近，エンハンソン機構という特異点の解消法が発見された[10]．これはブラックホールの特異点の問題に関係している．

タイプ IIA 超弦理論の低エネルギー有効理論である超重力理論の古典解として

$$\begin{aligned} ds^2 &= Z_2^{-1/2}Z_6^{-1/2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &\quad + Z_2^{1/2}Z_6^{1/2}dx^i dx_i \\ &\quad + V^{1/2}Z_2^{1/2}Z_6^{-1/2}ds_{K3}^2 \\ e^\phi &= g^2 Z_2^{1/2}Z_6^{-3/2} \\ C_3 &= (Z_2^{-1}-1)g^{-1}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ C_7 &= (Z_6^{-1}-1)g^{-1}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6 \end{aligned} \tag{29}$$

のような裸の特異点を持った解が存在する．ここで $\mu, \nu = 0, 1, 2$ は D2 ブレインの方向，$i = 7, 8, 9$ は D6 ブレインに直交する方向，r はその方向の動径座標，$r^2 = x^i x_i$，である．さらに

$$Z_2 = 1 - \frac{r_2}{r}, \quad Z_6 = 1 + \frac{r_6}{r} \tag{30}$$

で，積分定数は弦の結合定数 g とブレインの数 N などを使って

$$r_2 = \frac{(2\pi)^4 gNl_s^5}{2V}, \quad r_6 = \frac{gNl_s}{2} \tag{31}$$

と書けている．これは D6 ブレインが計量 ds_{K3}^2 で表される K3 カラビヤオ多様体に巻きついているような解で有効的に D6-D2 ブレインシステムになっている．このときの無限遠で測った K3 内部空間の体積が V である．ちょうど $r = r_2$ のと

ころでK3の体積がゼロになり時間的な裸の特異点が発生している．この特異点が超弦理論でどうみえるのかというのが問題である．D6-D2ブレインはBPS解と呼ばれるソリトン解であり，互いに力を及ぼさないことが知られている．したがって，弦理論の立場からはこの特異点はK3に巻きついたD6-D2ブレインがN枚集まって時空を曲げてでき上がったと解釈される．それなら，実際にブレインをよせ集めて裸の特異点を持った時空をつくれるかどうか調べてみよう．そのためには，この時空に新たにD6-D2ブレインを付け加えることができるかどうかを調べればよい．テストDブレインを近づけていく様子はボルン・インフェルト作用によって記述できる．ブレインの速度vは小さいとすると，ボルンインフェルト作用は

$$I = \int dt \frac{1}{2(2\pi)^2 g l_s^3} \left(\frac{V}{V_*} - 1 - \frac{gNl_s}{r} \right) v^2 \tag{32}$$

のように展開できて，質量がブレインの位置の関数になっていることがわかる．ここで，$V > V_* = (2\pi)^4 l_s^4$ と仮定している．これよりD6-D2ブレインはエンハンソン半径

$$r_e = \frac{2V}{V - V_*} r_2 > r_2 \tag{33}$$

のところで質量がゼロになり，それより内側にはいくことができず，したがって特異点に達することができないことがわかる．実は，ちょうどエンハンソン半径のところで対称性が高くなり軽い粒子が新たに現れるのである．これがエンハンソンの名前の由来となっている．つまり，エンハンソン半径付近では弦理論的な効果が重要になり，そこで有効な作用が変更を受けなければならないことがわかる．エンハンソン半径内にはブレインが局在できないので，超重力理論の解が持っていた裸の特異点はつくれない．このことから弦理論には裸の特異点など存在しないということが推測される．このように超重力理論ではエンハンソン半径より小さい領域の時空を記述できない．それではそこではどのような時空の描像が描けるのか興味深いところなのだが，よくわかってはいない．非可換幾何学との関連も議論されていて今後の成果が期待される．

4.3 ブレイン宇宙論

このように，弦理論では空間は一つの作用で記述されるのではなくいくつかの有効理論を張り合わせて記述される．同様の示唆はブレイン宇宙論からも得られる[11]．ブレイン宇宙論では，我々の宇宙は高次元空間の中の薄膜（ブレイン）として記述される．超弦理論の古典解としてこのような解があるということがブレイン宇宙論を考える動機としてあげられる．ブレイン宇宙論においても無からの創世という描像が得られることが知られている[12,13]．4次元ブレイン宇宙で何が起きているのかを記述するのに4次元有効場の理論と高次元での重力理論による記述があり得る．二つの記述は互いに相補的であり，AdS/CFT対応としてよく知られている[14]．この場合，もはや次元ですら絶対的なものではなく，我々の世界はあるときは4次元の理論として，そして別な状況では5次元の理論として記述されるということになる．これは，現実に空間がコンパクト化して5次元が4次元になるとかいうものとは違う．必要なのは連続的に移り変わることではなくて，対応の存在である．

5. 最後に

多様体動力学の量子化，空間構造の量子化，そしてその両方がうまく取り込まれた超弦理論，それぞれの観点から垣間みることのできる空間の性質を概観した．もちろん，空間の量子化とは何かという最終的な答えがあるわけではない．空間とは何かという問題は意外に根深い．幾何学の量子化と物質の量子化は同列に扱われるべきものなのか否か．空間のダイナミクスの量子化か，量子化された，あるいは離散化された空間か．困難な道である．にもかかわらず，多くの優秀な研究者を惹きつけてきたのは，それ以上の魅力が空間の量子論にあるからであろう．そして，最近の様々な

理論的な展開は今まさに空間の概念が一新される前夜かもしれないと思わせる．

参考文献

1) 佐藤文隆・小玉英雄，一般相対性理論（岩波講座現代の物理学 6）岩波書店 (1992).
2) A. コンヌ著，丸山文綱訳，非可換幾何学入門，(1990年)（岩波書店）.
3) N. Seiberg and E. Witten, String Theory and Non-commutative Geometry, JHEP 09 (1999) 032.
4) 佐藤文隆，相対性理論と超高エネルギー宇宙線，科学 **71** (2001) 183（岩波書店）.
5) G. Amelio-Camelia and T. Piran, Planck-scale deformation of Lorents symmetry as a solution to the UHECR and the TeV-γ paradoxes, astro-ph/0008107.
6) G. Amelino-Camelia and S. Majid, Waves on non-commutative spacetime and gamma-ray bursts, hep-th/9907110.
7) S. Carrol et. al., Non-commutative Field Theory and Lorents Violation, hep-th/0105082.
8) 弦理論の教科書としては J. Polchinski, "String Theory" (I, II) (Cambridge University Press, 1998) がある．
9) M. Gasperini and G. Veneziano, *Astropart. Phys.* **1** (1993) 317.
10) C.V. Johnson, A.W. Peet and J. Polchinski, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 086001.
11) L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690.
12) K. Koyama and J. Soda, *Phys. Lett.* **B483** (2000) 432.
13) J. Garriga and M. Sasaki, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 043523.
14) J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231.

（そうだ・じろう，京都大学総合人間学部）



書評　生命をつくる
生命現象の情報論的研究

中野　馨著，B5 判，124 頁，本体 1524 円，サイエンス社

本書は Computer Today に 1999 年 7 月号から 2001 年 1 月号まで連載された解説を筆者自身が加筆・修正してまとめたものである．本書では，いろいろな生命現象を情報システムとしてモデル化し，妥当性を計算機シミュレーションやロボットへの適用によって検証している．扱う題材は，

- 自己修復・自己増殖・自己組織化モデル
- 植物や L システムなどの成長モデル
- パーセプトロン型の進化学習
- 脳の適応化モデル
- 生物進化のコンピュータシミュレーション
- 概念形成機能にもとづく文明遺産継承能力

など多岐にわたる．これらの題材はすべて筆者の研究からとられているので，独創性が強いものとなっている．

さらに特筆すべきことは，これらのモデルのほとんどがコンピュータ上のシミュレーションのみではなく，実際の機械で実現され結果が提示されている点である．筆者は本文中で以下のように述べている．

「一般性のあるモデルを考えるよりも，わかりやすい具体例を実現し，多数の具体例からその共通原理を追及する立場をとる．(p.60)」
「“応用” は本書の本筋ではない．生体の機能をどこまで機械で実現できるかやってみて，その結果から生命現象に接近するということである．(p.67)」

これは筆者の研究に対する強い姿勢の現われであろう．結果として本書は研究者や専門家以外にも非常に読みやすく，「生命」の情報論的な一側面をとらえるのにふさわしい読み物となっている．一方で，モデル自体の詳細な吟味・比較が十分でないような記述も若干見られるが，そのような些細な点は全体の論調から見ると無視できる．だれにでもイメージは湧くが，その反面だれにもはっきりとはとらえられない「生命」という対象への研究アプローチの紹介にもなっているので，この分野の専門家にとっても十分に読み応えがある．

残念な点は，連載からくる制約のため各章の記述がやや希薄となり，実験内容や議論の詳細が省略されていることである．ただし筆者も認めているように，これについては本書の姉妹編である「脳をつくる（共立出版)」か原著論文を手に入れて読めばよいであろう．

また上で述べたように筆者自身の研究を題材としているため，国際会議での反応や研究の裏話などが随所に入っていて，同じ研究者としては非常に楽しく読むことができる．

さてこのように誉めてばかりでは書評としての面白みがないので，ここで若干の異論をあえて述べさせていただきたい．もっともこれはおそらく個人的な立場（研究スタンス）の違いからくるものであり，本書の評価とは一切関係がないことを断っておく．

姉妹書「脳をつくる」の頻繁な参照が示すように，本書では脳に関しての偏りが若干あるように思われる．このため「人間の知能」や「意識」という議論が後半に多く出てくる．これはこれでいいのだが，こうした議論は従来の「人工知能」の分野でなされつくした問題であり，あえて「生命」を主題とした本書の後半の主要トピックにする必要はあったのであろうか？ むしろ進化や遺伝子の議論を中心に展開することも十分できたのではないだろうか？

たとえば，筆者は 10 章で「進化による文明遺産継承能力の獲得」という非常に刺激的なタイトルで概念形成の継承を扱っている．これはリチャード・ドーキンスの「ミーム」の考えにつながるものと思われる．その一方で，やはりドーキンスの唱える「利己的遺伝子」や「拡張された表現型」などについて言及・考察されていない．さらに，進化学習と複雑系での重要テーマである創発現象についてもあまり触れられていないのが少し残念である．

15 年程前評者が大学院の修士の頃，情報関係のゼミで中野先生の研究室に数回お邪魔して直接話を聞く機会があった．当時の先生の話の面白さや研究に対する熱意を今もはっきり覚えている．その後評者自身も同じようなテーマを選んで現在に至るまで研究しているのも，少なからずそのときの影響があると思う．このため口絵にある昔の研究室の写真を見て非常に懐かしく思い，また先生の変わらぬ研究への熱意に改めて感銘を受けたことを述べて，この書評の結びとしたい．

伊庭　斉志（東京大学大学院新領域創成科学研究科）

書評 研究力



有馬朗人監修，四六判，320 頁，本体 1800 円，東京図書

同じ監修者によって編まれ好評だった前書『研究者』に似た書名だが，前書以上に本書は若い研究者志向の若者たちに，研究能力を高めるための的確なメッセージを伝えようとしている．わが国の第一線で活躍する代表的科学者にインタヴューして纏める手法は同じだが，本書では 10 人の物理・生物・工学の第一人者たちが，自分の研究を回顧しながら，これから研究に取り組む後進たちに，体験に基づく忠告の数々をあげていくのが得難い内容になった．

マイナーな企業にあって青色発光ダイオードの開発を世界に先駆けてやってのけた中村修二氏，ナノ・エレクトロニクスを開拓する榊裕之氏，免疫抗体物質サイトカインの遺伝子を突き止めた岸本忠三氏，宇宙創成のインフレーション理論を提唱した佐藤勝彦氏，高温岩体発電に挑む阿部博之氏，バイオチップや海洋・環境に切り込む軽部征夫氏，生きている植物中の水の動態画像化など植物研究の新分野を開拓する中西友子氏，世界初の光ニューロチップを開発した久間和生氏，世界一の NMR センターを擁して構造生物学に切り込む横山茂之氏，などである．

それぞれに第一線の研究力を発揮されているだけに，傾聴に値すると同時に，研究者たちがこれほどまでに自分を語るのに躊躇しなくなったことに感慨を覚える．筆者は科学雑誌の編集に当たっていたとき，私小説を書いてもらえ，と編集会議で発破をかけたものだ．とかく研究者は仕上げた研究の結論のみをきれいに書きたがって，涙も失敗も不安もあったその過程を隠したがるものだ．本書がこういう研究の裏面にまで立ち入って生き生きした像を伝えるのに成功したのは，周到な準備とインタビューのおかげであろう．いまは米国の大学教授になって日本を去った中村氏が，会社にすべて特許をとらせていながら退職金ゼロの仕打ちを受けている，とは驚きである．企業研究者が評価されないのは「みなさんが会社を辞めないからです」という．これは痛烈である．江崎玲於奈氏の退社騒動を想い出したが，第二，第三の中村氏がつづく予感がする．軽部研究室が東工大からそっくり東大に移った前代未聞の話も，日本が変貌を告げる底力がある証拠と見た．

本書では忠告の部分をゴチックにしていて分かりやすい．その数々を抜き書きしながら整理してみるとこうなる．

◇研究室・外国留学選び：外国研究では行き先を十分考えよ（有馬）．一流で独創的な研究室に入れ（有馬・阿部・中西）．一流を見て知れ（岸本）．プロ集団に身を置け（久間）．ある時期には自立せよ（有馬）．

◇発表・論文：自分だけを信ぜよ（中村）．失敗を恐れるな（阿部・横山）．どんな攻撃を受けてもめげるな（有馬）．仲間に批判されるために書くと思え（榊）．必ず英語にして発表せよ（有馬）．

◇勉強・研究：基礎の勉強は原書でやれ（中村）．自分で手法を開拓せよ（中西）．課題発見能力を高めよ（中西）．成果の 7 割はテーマで決まると考えよ（久間）．他人のまねをするな（中村）．流行を追うな（岸本，佐藤，阿部）．非常識にチャレンジしろ（軽部）．マジョリティを引っ張るつもりでやれ（横山）．実験結果と自分の頭だけでいけ（中村）．しっかりとした視点をもて（横山）．時代の潮流には大事なヒントがある（榊）．自分の得意技で攻め込め（榊・横山）．院生時代に得意分野をつかめ（久間）．金がなくても研究できる（中村）．継続とディスカッションこそ創造力の源泉だ（岸本）．ディスカッションこそ理論屋の命（佐藤）．知識を集めて頭に整理しておけ（軽部）．研究に強いモティベーションを持ち続けよ（中西）．

◇発明・特許：いい発明をしたら，会社を辞めて特許出願・論文発表せよ（中村）．学会はビジネスチャンスと思え（中村・中西）．工学は実学，まず特許をとって製品を作れ（軽部）．新事業創出には技と力を両立させよ（久間）．

若い読者には貴重なヒントの山々がある．知的好奇心の鼓吹と研究雰囲気選びが基本なのであろう．

金 子 務（帝京平成大学情報学部）

第12講　群と対称性

佐藤　光

12.1 対称性の数学的表現

物理でいう対称性とは，物理系に平行移動・回転などの変換を行っても系の物理的性質が変わらないことである．このとき物理系はその変換に対する対称性を持っているという．対称性にはそれを規定する変換が付随している．例として図 12.1 のような正三角形の持つ対称性を考えてみよう．この対称性を規定している変換は正三角形をそれ自身に移すような変換である．これを**合同操作**という．その一つは正三角形の中心 O のまわりの $2\pi/3$ およびその整数倍の角度の回転，$2\pi n/3$ $(n=1,2,3)$ である．$n=3$ すなわち 2π 回転は回らないことと同じであるので，回転角は常に 0 と 2π のあいだに制限することができる．もう一つの変換は 3 本の対称軸に関する鏡映である．**鏡映**とは対称軸の位置に紙面と垂直に鏡を置いて映した像への変換である．

このような対称性を規定している変換にはどのような性質があるだろうか．正三角形を中心のまわりに反時計方向に $2\pi/3$ 回転する操作を θ で表すことにす

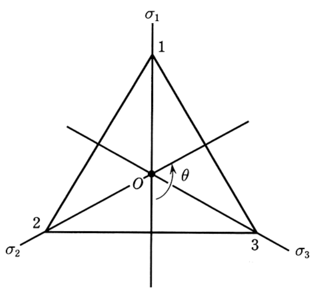


図 12.1　正三角形の合同操作．

る．この操作を続けて n 回行えば $(2\pi/3)n$ 回転することになり，これは θ^n と表される．何も操作しないことも変換の仲間に入れて，これを**恒等変換**といい，e で表すことにする．また，3 本の対称軸に関する鏡映変換を σ_i $(i = 1, 2, 3)$ で表す．鏡映を 2 回続けて行うと元に戻るから，$\sigma_i^2 = e$ である．同様に $\theta^3 = e$. こうして正三角形を自分自身に移すすべての変換は次の 6 つの操作であることがわかる．

$$\{e, \theta, \theta^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}. \tag{12.1}$$

実際，任意の 2 つの合同操作を続けて行うことは，集合 (12.1) の中にある一つの操作を 1 回行うことと同じであることが示せる．回転 θ^a を行い，次に回転 θ^b を行った場合は

$$\theta^b\theta^a = \theta^c, \quad c = a + b \mod 3. \tag{12.2}$$

ここで，mod 3 とは $|a + b|$ が 3 以上になるときは 3 あるいは 3 の倍数を加減して $0 \leq c < 3$ とすることを意味する．(12.2) 式のように，2 つ以上の操作を続けて行うときは，右から順番に操作を行うものとする．このようにして**操作の積**を定義することができる．

2 つの鏡映変換を続けて行うことは回転と同じである．例えば図 12.1 でまず σ_1 を行い，さらに σ_2 を行うと，σ_1 の鏡映操作により頂点 2 と 3 が入れ替わり，次に σ_2 により頂点 1 と 2 が入れ替わる．結局，$\sigma_2\sigma_1$ により頂点は $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$ と移動し，これは回転 θ と同じである：$\sigma_2\sigma_1 = \theta$. 他の組み合わせについても同様にして求めることができ，その結果を表 12.1 にあげてある．ここで操作の順序を入れ替えると結果も違ってくることに注意して欲しい．上の例では，$\sigma_1\sigma_2 = \theta^2$ となる．

表 12.1　2 つの合同操作の積 ab.

a \ b	σ_1	σ_2	σ_3	θ	θ^2
σ_1	e	θ^2	θ	σ_2	σ_3
σ_2	θ	e	θ^2	σ_3	σ_1
σ_3	θ^2	θ	e	σ_1	σ_2
θ	σ_3	σ_1	σ_2	θ^2	e
θ^2	σ_2	σ_3	σ_1	e	θ

表 12.1 を用いることによって，合同操作を何回続けて行っても，結果は集合 (12.1) のうちの一つの操作に帰着することがわかる．このような対称性を保つ操作や変換の集合に対して群の概念が導入される．

群の定義　集合 G の 2 元 a, b に対して積 ab が定義されており，ab も G に属する．すなわち G は積の演算に関して閉じているとする．さらに次の 3 条件が満たされるとき，G を**群**（group）という．

1.　結合律：任意の 3 つの元 $a, b, c \in \mathrm{G}$ に対して，$a(bc) = (ab)c$ が成り立つ．

2. 単位元と呼ばれる特別な元 e が存在して，すべての $a \in \mathrm{G}$ に対し，$ae = ea = a$ が成り立つ．
3. G の任意の元 a に対し，その逆元と呼ばれる元 a^{-1} が存在して，$aa^{-1} = a^{-1}a = e$ が成り立つ．

群 G の部分集合 H が G の乗法によってまた群となるならば，H を G の**部分群**（subgroup）という．群 G のすべての元と可換な元の集合は G の部分群になることがいえる．これを**群 G の中心**（center）という．群 G に含まれる元の個数を G の**位数**という．位数が有限である群を**有限群**といい，そうでない群を**無限群**という．

正三角形の合同操作からなる集合 (12.1) が群をなすことは容易に確かめられる．特に $\theta\theta^2 = \theta^2\theta = \theta^3 = e$ であるから，θ の逆元 θ^{-1} は θ^2 であり，これは時計方向の $(2\pi/3)$ 回転に等しい．この群は位数 6 の有限群である．**一般に対称性を規定している変換あるいは操作全体の集合は群をなす．**物理において群論が重要であり，かつ有用であるのはこのためである．

2 つの群 G と K があるとき，G の一つの元 g と K の一つの元 k とを取り出して，組 (g, k) を作る．このような組全体の集合を $\mathrm{G} \otimes \mathrm{K}$ と書くと，これは積の演算

$$(g_1, k_1)(g_2, k_2) = (g_1 g_2, k_1 k_2) \tag{12.3}$$

のもとで群を作ることが示せる．この群を群 G と群 K の**直積**，または**直積群**という．

12.2 群の例

正多角形をそれ自身に移す合同操作の集合は群をなし，**合同変換群**と呼ばれる．正三角形の合同変換群の例で見たように，群の乗法に関して交換律 $ab = ba$ $(a, b \in \mathrm{G})$ は一般には成立しない．交換律が成り立つような群を**可換群**または**アーベル群**（Abelian group）という．例えば，整数の集合 $Z_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ において，群の乗法を加法で定義し，和が n 以上のとき，n の整数倍を引いた残りが Z_n に属するように演算を定義すれば，Z_n はこの演算について群になる．この群は演算が加法で定義されているので交換律が成り立ち，可換群である．このような群を**加法群**または**加群**という．この例のように，群の乗法はかならずしも掛け算である必要はない．

n 個のものを n 個の席に配置し，その配置を入れ替える操作を**置換**という．席 k $(k = 1, \cdots, n)$ にあるものを席 p_k に移す置換を

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{12.4}$$

と表す．積の演算を置換の操作を順次行うことによって定義すれば

$$qp = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_{p_1} & q_{p_2} & \cdots & q_{p_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_{p_1} & q_{p_2} & \cdots & q_{p_n} \end{pmatrix} \tag{12.5}$$

である．このとき置換全体の集合は群となることが示せる．これを n 次の**対称群**と呼ぶ．これは位数 $n!$ の有限群である．置換 (12.3) において，配置の入れ替えが偶（奇）数回のものを偶（奇）置換という．偶置換全体の集合は対称群の部分群であり，これを n 次**交代群**と呼ぶ．

正 n 角形を回転によってそれ自身に移す操作の集合は，鏡映を含む合同操作全体の部分集合である．$(2\pi/n)$ 回転を θ で表せば，回転操作のみからなる集合 $\{\theta, \theta^2, \cdots, \theta^{n-1}, \theta^n = e\}$ は群をなし，合同変換群の部分群である．このように n 乗すると単位元になるような元を位数 n の元といい，そのべき乗から作られる群を n 位の**巡回群**という．

3 次元空間における平行移動（$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}$ は任意のベクトル）を考えよう．2 つの平行移動を続けて行うことは

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

であるから，積の演算を平行移動のベクトルの和で定義すると，この乗法のもとで平行移動全体の集合は群をなす．実際に，結合律が成り立つのは自明である．単位元はゼロベクトル $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ に対応した平行移動，すなわち恒等変換である．ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対応した平行移動の逆元は，$-\boldsymbol{a}$ に対応した平行移動である．また，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ であるから，これは可換群である．平行移動全体の作る群を**並進群**と呼ぶ．平行移動の 3 次元ベクトルは連続的な値をとる 3 つの成分で表されるから，この群の元は連続無限個ある．このように群の元が連続的なパラメータによる群を**連続群**という．これは位数が無限大の無限群である．

12.3 線形変換群

n 次元ベクトル空間における 1 次変換全体の集合は群をなし，これを**一般線形変換群**という．（ベクトル空間と 1 次変換については第 4 講を参照．）この群は 1 次変換の連続的なパラメータによるので連続群である．1 次変換は正則行列で表されるから，この群は n 次正則行列全体の作る群である．実際に，A, B を正則行列，$\det A \neq 0, \det B \neq 0$，とすれば，積 AB も正則，すなわち $\det AB = \det A \det B \neq 0$ である．また逆行列を逆元に，単位行列を単位元に対応させれば，これらの行列の全体は群をなすのである．正則な n 次複素行列全体の作る群を複素一般線形変換群といい，$GL(n, C)$ と表す．これは線形変換群の中では最大のもので，その部分群としていろいろな線形変換群が得られる．特に n 次実正則行列全体の群は実一般線形変換群と呼ばれ，$GL(n, R)$ と

表される．正則行列の中で，行列式が1であるようなものの全体は一般線形変換群の部分群であり，**特殊線形変換群**と呼ばれ，$SL(n,C)$ あるいは $SL(n,R)$ と表される．

2つの n 次ユニタリ行列 U,V の積 UV もまたユニタリ行列であり，単位行列を単位元に，逆行列を逆元に対応させれば n 次ユニタリ行列の全体は群をなす．これを n 次**ユニタリ群**といい，$U(n)$ と表す．$U(n)$ は $GL(n,C)$ の部分群である．さらに制限を加えて，行列式が1であるようなユニタリ行列全体の作る群を**特殊ユニタリ群**といって，$SU(n)$ と記す．これは $U(n)$ の部分群である．

ユニタリ変換は複素ベクトル空間での内積を不変に保つような変換であるが，これを実ベクトル空間に限ったものが直交変換であり，その変換行列が直交行列である．n 次直交行列の全体は群をなす．これを直交群といい，$O(n)$ と表す．特に行列式が1であるような直交行列全体の作る群を**特殊直交群**または n 次元**回転群**といい，$SO(n)$ と記す．これは n 次元実ベクトル空間における回転操作のなす群である．

以上で述べたような線形変換群は**線形リー群**とも呼ばれるものである．これらの群の単位元 e は恒等変換である．単位元のごく近くにある元は微小変換を表している．例として2次元回転群 $SO(2)$ を考えよう．これは2次元の座標回転であるから，その元は回転角を t として

$$A(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix} \tag{12.6}$$

と表される．実変数 t が0のとき，$A(0)$ が単位元である．十分小さな t に対する変換 $A(t)$ が単位元の近傍にある元である．t が十分小さいとき

$$A(t)\simeq A(0)+A'(0)t \tag{12.7}$$

であるから，単位元の近傍にある元のふるまいは $t=0$ における微分係数 $A'(0)$ によって決まる．$A'(0)$ をパラメータ t に関する**無限小変換**または**接変換**という．

ここで重要なことは，もし初めに $t=0$ において $A'(0)$ が与えられていれば，単位元の近傍だけでなく，任意の t に対する $A(t)$ をも知ることができるということである．実際に $A(t)$ は次の微分方程式に従うことがわかる．

$$\frac{d}{dt}A(t)=iXA(t),\quad X=-iA'(0). \tag{12.8}$$

すなわち $A(t)$ は微分方程式 (12.8) の，初期条件 $A(0)=1$（単位行列）のもとでの解であり，それは微分方程式の解の一意性により X によって一意的に定まる．この意味で X を $SO(2)$ の**生成子**（generator）と呼ぶ．微分方程式 (12.8) は行列の指数関数を解として与える．

$$A(t)=\exp(iXt),\quad X=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}. \tag{12.9}$$

一般に正方行列 R の指数関数 $\exp R$ は無限級数

$$\exp R = 1 + R + \frac{R^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} \tag{12.10}$$

によって定義される．行列 $\exp(iXt)$ の各成分は任意の t について収束する t のべき級数で表され

$$A'(t) = iX + i^2X^2t + \cdots = iX\exp(iXt) = iXA(t) \tag{12.11}$$

となって，たしかに (12.9) 式は微分方程式 (12.8) の解である．

次に 3 次元回転群 $SO(3)$ の場合を考えよう．この群の元は行列式が 1 であるような 3×3 直交行列 O である．行列 O の転置行列を O^T と表せば $O^TO = 1$ であるから，この条件は 9 個の行列成分のあいだに 6 個の関係を与えることがわかる．したがって直交行列の独立な成分の数（自由度）は 3 である．単位元の近傍にある元を $= 1 + M$ と表せば

$$O^TO = (1 + M^T)(1 + M) = 1 \tag{12.12}$$

である．M の行列成分は微小量であるから 2 次以上を無視すれば (12.12) 式より

$$M + M^T = 0, \quad M^T = -M, \tag{12.13}$$

すなわち M は実交代行列である．その一般形は t_1, t_2, t_3 を微小量として

$$M = \begin{pmatrix} 0 & t_3 & -t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3}(iX_it_i) \tag{12.14}$$

と書くことができる．3 個のパラメータ t_1, t_2, t_3 に対応して 3 個の無限小変換 $iX_i(i = 1, 2, 3)$ が得られる．ここで X_i は次のように与えられる．

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.15}$$

これらの無限小変換が与えられたとき，$SO(3)$ の単位元と連続的につながる任意の元は $\exp(i\sum_i X_it_i)$ によって与えられる．(12.15) 式の X_i は $SO(3)$ の生成子と呼ばれ，次の交換関係に従うことがわかる．

$$[X_i, X_j] = i\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}X_k \tag{12.16}$$

ここで，$[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$ である．第 11 講で述べたように，このような交換関係に従う生成子の張るベクトル空間を**リー代数**と呼ぶ．一般に線形リー群の元である行列の独立成分の数を d とすれば，d 個のパラメータ t_i $(i = 1, 2, \cdots, d)$ に対応して d 個の独立な生成子 X_i がある．これら X_i の張るベクトル空間を線形リー群のリー代数という．また d をリー群の次元という．

12.4 群の表現

対称性を保つような操作や変換の集合は群をなすことを述べたが，群の性質や構造を調べるためには“操作”を定量的に“表現”する必要がある．そのためには適当な座標系を導入し，そこでの変換として“操作”を表現してやればよい．もう少し一般的にいうと，ベクトル空間を考え，その中での1次変換として群を表現するのである．このようなベクトル空間を**表現空間**という．すなわち，群Gの各元 g_i に対応して正則な $n \times n$ 行列 $D(g_i)$ が与えられており，群の元のあいだの関係 $g_i g_j = g_k$ に対応して，行列のあいだの関係

$$D(g_i)D(g_j) = D(g_k) \tag{12.17}$$

が成り立っているとき，これを群Gの**行列による表現**という．また，$D(g)$ を**表現行列**といい，行列の大きさ n を**表現の次元**という．これはまた表現空間の次元に等しい．群の単位元には単位行列が，逆元には逆行列が対応することは容易にわかる．群の元と表現行列のあいだの対応は一般には多対1である．このような対応を**準同型**という．例えば群のすべての元に1（1行1列の行列）を対応させた表現を**恒等表現**という．特に1対1対応の場合には**忠実な表現**という．

群Gの2つの表現 D, D' の表現行列 $D(g), D'(g)$ が正則な行列 V によって変換

$$D'(g) = V^{-1}D(g)V \tag{12.18}$$

で結ばれているとき，2つの表現 D と D' は同値であるといい，変換 (12.18) を同値変換という．同値変換を行うことによって表現行列を

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \tag{12.19}$$

のようなブロック対角化された形にすることができるとき，表現 D は（完全）可約であるという．可約でない表現を**既約表現**という．(12.19) 式で D_1, D_2 はまた群Gの表現になっている．このとき表現 D は D_1 と D_2 の**直和**であるといい

$$D = D_1 \oplus D_2 \tag{12.20}$$

と表す．表現 D の次元は D_1 の次元と D_2 の次元の和に等しい．（完全）可約な表現は同値変換によっていくつかの既約表現の直和に分解することができる．

群Gの元に対応する1次変換によって表現空間の中のベクトルはまたその空間の中のベクトルに変換され，空間の外にはみ出すことはない．すなわち表現空間は群のすべての元に対応する変換のもとで不変である．このような空間を群Gに関する**不変部分空間**という．可約な表現の表現空間は既約表現に対応したいくつかの不変部分空間に分解できる．これに対して，既約表現の表現空間はもうそれ以上小さな不変部分空間に分解することはできない．

群の表現の例として3次元回転群 $SO(3)$ について見てみよう．第11講で軌道角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ は物理系の空間回転を引き起こす量子力学的演算子であることを見た．リー代数 $\hat{X}_1 = L_x/\hbar, \hat{X}_2 = L_y/\hbar, \hat{X}_3 = L_z/\hbar$ は (12.16) 式と同じ形の交換関係を満たす．任意の空間回転の演算子は

$$\hat{U}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \exp\left(i \sum_i \hat{X}_i \theta_i\right) \tag{12.21}$$

で与えられ，$\hat{U}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ は $SO(3)$ の元である．一方，(12.15) 式で与えられる 3×3 行列 X_i は $\hat{X}_i$ と同じ交換関係に従う．このとき行列 X_i を $SO(3)$ のリー代数 $\hat{X}_i$ の表現であるという．一般にリー代数 $\hat{X}_i$ に $n \times n$ 行列 $\rho(\hat{X}_i)$ が対応し，

$$[\rho(\hat{X}_i), \rho(\hat{X}_j)] = \sum_k f_{ijk}\, \rho(\hat{X}_k) \tag{12.22}$$

が成り立つとき，$\rho(\hat{X}_i)$ をリー代数の n 次元表現という．このとき群の表現は

$$D(g) = \exp\left(i \sum_i \rho(\hat{X}_i) \theta_i\right) \tag{12.23}$$

によって与えられる．すなわち線形リー群の表現は対応するリー代数の表現によって決定されるのである．

表現行列 $\rho(\hat{X}_i)$ を構造定数 f_{ijk} を用いて

$$\{\rho(\hat{X}_i)\}_{kj} = f_{ijk} \tag{12.24}$$

と定義すれば，これはリー代数の表現になっていることがわかる．実際に，交換関係 (12.22) はヤコビの恒等式（第11講 (11.27) 式を参照）を使って確かめることができる．この表現をリー代数の**随伴表現**という．$SO(3)$ の場合には $f_{ijk} = i\varepsilon_{ijk}$ であるから，$SO(3)$ の随伴表現は3次元で，行列 (12.15) で与えられる．

$SO(3)$ の既約表現を得るには，そのリー代数 $\hat{X}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の既約表現を求めればよい．第11講で導いた $L_z, L_\pm$ に対する関係式 (11.37), (11.41), (11.42) 式を用いて

$$\begin{aligned}
\langle l, m|\hat{X}_1|l, m'\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\delta_{m,m'+1} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\delta_{m,m'-1},
\end{aligned} \tag{12.25}$$

$$\begin{aligned}
\langle l, m|\hat{X}_2|l, m'\rangle &= \frac{1}{2i}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\delta_{m,m'+1} \\
&\quad - \frac{1}{2i}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\delta_{m,m'-1},
\end{aligned} \tag{12.26}$$

$$\langle l, m|\hat{X}_3|l, m'\rangle = m\,\delta_{m,m'} \tag{12.27}$$

を得る．$m, m' = -l, -l+1, \cdots, l$ であるからこれらは $(2l+1) \times (2l+1)$ 行列であり，リー代数の $(2l+1)$ 次元表現を与える．$l = 0$ は恒等表現である．

$l=1$ は次のような3次元表現を与える．

$$\hat{X}_1 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}_2 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{X}_3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.28}$$

以下，同様にして5次元表現 ($l=2$)，7次元表現 ($l=3$)，… が得られる．

例 12.1 $SO(3)$ のリー代数の随伴表現は3次元で，行列 (12.15) で与えられることを述べた．また $l=1$ の表現 (12.28) も3次元の既約表現である．この2つの表現は見かけは異なるが実は同値な表現の例である．実際ユニタリ行列

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.29}$$

による同値変換 (12.18) により，$\hat{X}_i = V^{-1}X_iV$ であることを確かめることができるので，読者の演習問題としておこう．

次回は「トポロジーと微分幾何」について学ぶ．

参考文献

1) 佐藤 光著：物理数学特論「群と物理」(パリティ物理学コース，丸善)．
2) 吉川圭二著：群と表現（理工系の基礎数学 9，岩波書店)．

（さとう・ひかる，兵庫教育大学学校教育学部）

〈7月号の訂正〉

7月号 p.75 の上から2行目にあたる数式に誤りがありました．分母が「$R^2+\sigma^2-2R\sigma\sin\theta$」となっておりますが，正しくは「$\sqrt{R^2+\sigma^2-2R\sigma\sin\theta}$」です．

リレー連載

21世紀の科学をつくる 脳の謎に挑む 第6回

光計測で脳活動をみる

江田 英雄

1. はじめに ——生きたヒトの脳活動を見るということ

生きているヒトの脳の働きを調べるためには，脳の画像化装置が不可欠となっている．画像は見るものに相当なインパクトを与えることができる一方で，ともすれば誤った印象をも簡単に植えつけてしまう危険がある．どのように計測したデータをどのような原理に基づいてどのような計算を経てどのように表示した画像であるか「すべてをきちんと理解した上で画像を見る」ことが望まれる．しかしこのような意見はたとえば，すべての磁気共鳴イメージング（MRI）関係者に量子力学を完全に理解することを強制するようなものではとんど意味がない．また，「それほど勉強しなければ近づけないようなシステム」では，普及しないのも事実である．

本稿では生体計測およびその画像化を専門とする一研究者の立場からの脳研究へのアプローチを紹介する．最初に脳画像システムを概観し，次に光を使った新しい脳機能計測方法を紹介する．光に関して雑学的なことも含めて詳しく述べたい．光は波と粒子の両方の性質を示すがここでは波動としての光を強調する．最後に光装置が脳研究において占める位置に関して，希望的観測も含めて述べることにしたい．いまや脳研究には幅広い分野からの才能が集っている．その一部の方々にでも，光計測が多少とも役に立ちそうだとの印象を持っていただけるならば幸いである．

2. 非侵襲的に生体を計測する

人を測って画像化する装置としては超音波やX線，MRI（磁気共鳴イメージング）などが臨床の場に普及している．いずれの装置も生体に波動を照射し，生体から出てくる（戻ってくる）信号に基づいてそれらの吸収などの情報を画像化するものである．使う波動の波長の違いによって音波と呼ばれたり電磁波と呼ばれたりするのだが，生体計測に使われる波動の特徴は水による吸収が小さいことである．生体はほとんど水と言ってもよいくらいなので，逆にいえば「水による吸収が小さい波長の波動」が生体を透過しやすいという理由から生体計測に使われていると言ってもよい．一方，生体から自発的に放射されている波動を測定する装置としては，脳波（EEG）や脳磁図（MEG）といったものがあり，これらの波長も水に吸収されにくいものであることが特徴である．また，体内に放射性同位元素を注入することで代謝という重要なデータを与えるポジトロンエミッショントモ

グラフィー（PET）も，体内を抜けてくるガンマ線を検出している．

以上に書いた画像装置は生体の構造画像を表示するものと，機能画像を表示するものとに大別することもできる．生体計測装置は，何を，どのくらいの空間分解能，時間分解能，サンプリング時間で測定するかによってスペックが決まる．もちろん同じものを測定するのならば「画質のよい」システムのほうが望ましく，さらに付属品や使い勝手なども充実しているほうがよい．

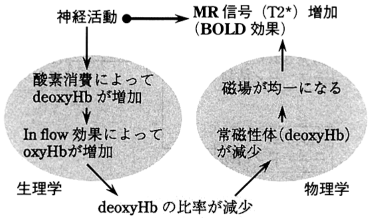


図1　fMRI の Blood Oxygenation Level Dependent 信号の説明．

3. 脳研究のためには何をどのくらいの分解能で測定すればよいか

ミクロな視点から脳活動を見ると，まずニューロンの発火に始まり，代謝物質の分泌を経て，血行動態の変化という流れをたどることが知られている．そこから脳の様々な領野間の関係などを経て，マクロな視点（と言っていいかどうか議論があるところであるが）からは，意識やクオリアなどの問題が現れてくる．画像を主体とする脳研究の順序で言うと，ニューロン，代謝物質，血行動態，それぞれの画像が確実に得られて初めて意識やクオリアの問題に取り組む準備ができたと言えるのであろう．しかし我々は「大胆な推測に基づく不完全な画像」で脳を研究せねばならないのが，残念ながら，現状なのである．

脳計測の第一の目的はニューロンの活動の様子を調べることである．誤解を恐れずに簡便化して言うと，ニューロンの活動として測定すべき対象は，長さはミリメータ，時間はミリ秒のオーダを持っていると見てよいが，問題はその対象が「深く」にあることである．EEG では大脳皮質から頭部表皮までの間に信号が攪乱されてしまう．EEG は簡単に測定できるけれども何を測っているのかよくわからない，という批判はこの現象に起因している．また MEG は電気変化に起因する磁気変化を計測するものであるが，磁気センサ素子の原理上，大脳皮質（あるいは頭部表皮と言ってもよい）に平行な電気ダイポールに基づく磁気信号は捕らえられない．膨大な数のニューロンの，すべての活動の様子を画像として得ることは，現状存在する EEG や MEG などの装置を用いても不可能に近い．

脳の画像として脳機能研究に一番使われている装置は機能的 MRI（fMRI）である．これは血液酸素状態レベルに依存して生ずる BOLD 信号（Blood Oxygenation Level Dependent）を計測して血行動態の変化を画像化すると言われていて，上と同様に書くと，長さはセンチメータ，時間は秒のオーダの信号を対象とするものである．**図1**に BOLD 信号の機序を模式的に示した．ニューロンの活動によって MR 信号が増えることを説明している．fMRI は高速撮影のシークエンスと統計計算のソフトウエアとが準備できれば，臨床用の MRI 装置（できれば高磁場のもののほうが望ましいようだが）を用いて実現できる．通常の MRI の構造画像撮影とは異なってリアルタイムでの fMRI 画像表示は難しく，何回かのタスクを与えて測定した結果を複雑な統計計算を経て1枚の機能画像として，高空間分解能の構造画像に重ね合わせて表示するものである．統計計算のソフトウエアはロンドン大学のグループがインターネットで配布している SPM（Statistical Parametric Mapping）が世界的によく使われている．メーリングリストでの議論も活発で，SPM はほとんどこの分野での標準となっていると言っても過言ではない．この SPM

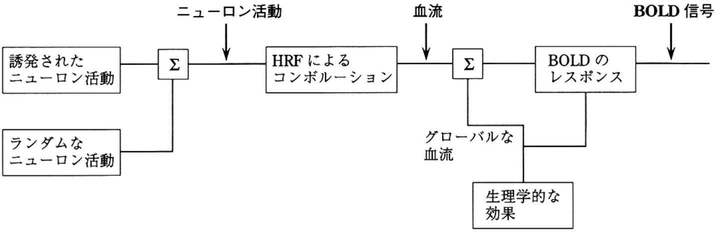


図2　ニューロン活動から BOLD 信号までのモデル図.

の心臓部分の一つが，血行動態を決めるヘモダイナミックレスポンスファンクション（HRF）による元信号のコンボルーション操作であろう．**図 2** にニューロン活動から BOLD 信号へ至る HRF のモデル図を示した．このようにニューロンの活動と血行動態とが HRF のコンボルーション操作により関係づけられると仮定することによって初めて，fMRI 画像は脳機能画像として意味を持つ．fMRI は重ね合わされる構造画像の空間分解能の高さが着目されがちであるが，ニューロン活動と関係した血行動態を測定しているという仮定を忘れてはならない．問題は，そもそも HRF の基礎となるべきニューロン発火から血行動態の変化までのストーリーの機序が，まだ完全には解明されていないという点にある．

4. 光も波動であり，身近に使われている

光は電磁波として通常分類される．個人差はあるが我々の目は 400 nm から 700 nm くらいの波長の電磁波を「見る」ことができ，可視域と呼ばれるこの波長域の電磁波を我々は「光」として認識している．400 nm 付近は紫色，700 nm 付近は赤色として見え，その間には赤橙黄緑青藍紫と虹の色が並ぶ．これらの色に関する研究は古来からさまざまな素敵なアプローチがあるのだがここではそれらが心理的に及ぼす影響などは考えず単に波長の異なる電磁波として扱おう．400 nm より短い波長を紫外線，700 nm よりも長い波長を赤外線と呼び，赤外線のうちで可視域に近い波長を近赤外線，遠い波長を遠赤外線（ご存知のように熱効果を持っている）と呼んでいる．

最近は，波長 635 nm から 830 nm くらいまでは半導体レーザが光源として便利に使えるようになり，この波長の範囲は意外と我々の生活に身近なものになっている．たとえば，学会発表などで使われる赤のレーザポインタは 635 nm（690 nm，655 nm もあるが 635 nm のほうが目の感度の関係で明るく見える）の半導体レーザを使っているし，DVD（ディジタルビデオディスク）の読みとりには 650 nm 付近，CD（コンパクトディスク）の読みとりには 780 nm 付近の波長の半導体レーザが使われている．ちなみにテレビのリモコンには 914 nm 付近の波長が使われているのだが人の目に感度がないためその波長は見ることができない．

生体計測に使われる近赤外線は 800 nm 付近の波長である．この波長域は特に水による吸収が小さい（1000 nm より長くなると急激に光は水に吸収されるようになる），また，血液による吸収が小さい（600 nm より短いと急激に光は血液中のヘモグロビンに吸収されるようになる）という 2 つの理由から生体を透過しやすく，X 線同様に生体内部の情報を知るために使うことができる．**図 3** に波長 200 nm から 100000 nm までの波長の水の光吸収スペクトルを示す．800 nm 付近で吸収が小さいことがわかる．しかし最近まであまり使われなかったのは，よい光学素子がなかったこと，および，生体内で光は吸収と散乱によって減衰され

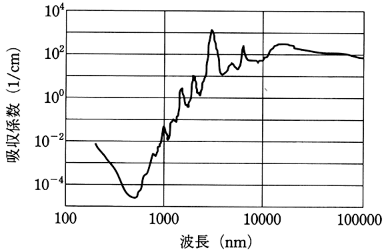


図３　水の光吸収スペクトル．
（200 nm から 100000 nm まで表示）

るため解析が困難なことが原因であった．

5. 光伝播理論の概観

生体に光を照射してその吸収を画像化するという技術は，一般に「濁った系における定量測定」と言える．昼間濃い霧の中を車で運転する状況をイメージしてもらえればよい．衛星から雲の向こうの地上を観察するのも似たような状況である．

光の減衰が吸収だけならば，光の強度比の対数が吸収濃度と光路長の積に比例して減衰するという分光光度計の理論で扱える．あるいは単一の光散乱だけならば（散乱によって波長が変わらない散乱を考えれば）光の波長と散乱粒子の大きさによって理論式を選択して適用できる．散乱粒子が光の波長に比べて小さい場合はレイリー散乱の式が使え，これは「空が青い」「夕焼けが赤い」ことを説明するためによく引き合いに出される．また，散乱粒子が光の波長と同じくらいの大きさの場合には，レイリー散乱よりもややこしいミー散乱の式が解析に使える．生体は細胞レベルから臓器レベルまであらゆる大きさを持つ不均一物質のまとまりであるから，単一の散乱だけでも理論的に扱うのは難しい上に，何度も散乱を引き起こす多重散乱を考慮せねばならず一筋縄には解くことはできない．生体には吸収と，吸収よりも数桁大きい散乱が複雑に混在しているのである．そうなると一つの粒子による散乱というミクロな視点ではなく，光が全体としてどのように吸収，散乱されながら伝播していくかというマクロな視点の式のほうが便利である．輸送方程式，もしくは放射の方程式が解析に適用できる．輸送方程式は半導体内の電子やホールの移動，または，原子炉内での熱中性子の移動などを記述するために使われてきた．放射の方程式は大気での光多重散乱の解析に使われてきた．双方ともに，適度に近似して簡単にしていくと，吸収係数，散乱係数，散乱の角度分布の３つをパラメータに持つ拡散方程式になる．この光拡散方程式を我々は支配方程式として受け入れている．**図４**に輸送方程式から拡散方程式を導出する方法を，Kaltenbach らの手法に従ってまとめた．拡散近似によって，散乱係数と散乱の角度分布との２つのパラメータは，その積の形をとる等価散乱係数として等方散乱近似されることになる．

6. X 線との比較

近赤外線測定と X 線測定とを比較してみよう．X 線は骨で強く吸収されるため撮影した画像にはその影が見える．また X 線は生体内をほぼ直進するので X 線で掌を撮影すると骨が「ぼやけずに」写る．骨以外にも血液や組織でも X 線は吸収され，その吸収係数が既知であるから，画像表示する際のスケールを調節すれば生体内の目的とする対象を見ることができる．このように，X 線の場合には吸収係数の違いがダイレクトに組織の違いを表すため，生体情報の可視化（画像化）が可能になる．一方，近赤外線を掌（の内側）にあてて専用のカメラで掌の外側から見ると，骨ではなく血管の像が見える．近赤外線は生体では血液中のヘモグロビンで強く吸収されるので血管の像ができるのである．（しかし同時に組織で強く散乱されるためその像は多少ぼやけている．）一方，血液に含まれる酸素運搬物質であるヘモグロビンはその酸素状態によって色が変わるため，複数波長の光で計

輸送方程式，ただし I は，radiance（W/mm^2/str）

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I(\boldsymbol{r},t,\Omega)+\Omega\cdot\nabla I(\boldsymbol{r},t,\Omega)$$
$$=\frac{\mu_t}{4\pi}\int p(\Omega,\Omega')I(\boldsymbol{r},t,\Omega)d^2\Omega'$$
$$-\mu_t I(\boldsymbol{r},t,\Omega)+q(\boldsymbol{r},t,\Omega)$$

テンソルで取り扱う

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{(l)}(\boldsymbol{r},t)+\mu_t\Phi^{(l)}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{c}\nabla\cdot\Phi^{(l+1)}(\boldsymbol{r},t)$$
$$=q^{(l)}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\mu_t c^l}{4\pi}\int d^2\Phi' I(\boldsymbol{r},t,\Omega)$$
$$\times\int d^2\Omega\Omega^{\otimes l}p(\Omega,\Omega')$$

fluence rate ($l=0$) の式は，flux ($l=1$) を含む

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{r},t)+\mu_a\phi(\boldsymbol{r},t)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=q^{(0)}(\boldsymbol{r},t)$$

flux ($l=1$) の式は，$l=2$ のテンソルを含む

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)}{3D}+\frac{1}{3}\nabla\phi(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{c}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{r},t)$$
$$=q^{(l)}(\boldsymbol{r},t)$$

fluence rate の式と Fick's law の式の 2 つが，拡散方程式である．

直積をとる

$$\Phi^{(n)}:=c^n\int\Omega^{\otimes n}I(\boldsymbol{r},t,\Omega)d^2\Omega$$

0 階 fluence rate

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\Phi^{(0)}=\int I(\boldsymbol{r},t,\Omega)d^2\Omega$$

1 階 flux

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\Phi^{(1)}$$
$$=c\int\Omega I(\boldsymbol{r},t,\Omega)d^2\Omega$$

2 階 tensor

$$\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{r},t)=\Phi^{(2)}$$
$$=c^2\int\Omega\Omega I(\boldsymbol{r},t,\Omega)d^2\Omega$$

ルジャンドル多項式で展開

$$I(\boldsymbol{r},t,\Omega)$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}I_l^m(\boldsymbol{r},t)Y_l^m(\Omega)$$

fluence rate と flux の関係式（Fick's law）

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=-D\nabla\phi(\boldsymbol{r},t)$$

Kaltenbach et al.,
Medical Optical Tomography,
SPIE IS **11**, 1993

図 4　輸送方程式から拡散方程式の導出．

測した吸収係数からヘモグロビンの酸素状態を算出することができる．X 線を用いた構造画像に対して，複数の波長の近赤外線を用いると酸素状態という機能画像を得ることができる．

7. 光吸収を画像化する装置

光の吸収を画像化する目的で我々が試作した装置とそのプローブを頭部へ取り付けた図を図 **5** に示す．これは光源（780 nm，805 nm，830 nm の 3 波長の近赤外半導体レーザ），導光路（多成分ガラスファイバー），受光素子（光電子増倍管），制御部，表示部などから構成される．今回試作したものは 6 組のペアで測定可能になるように，光源および照射側の導光路，受光素子および受光側の導光路とも，それぞれ 6 セット備えている．この

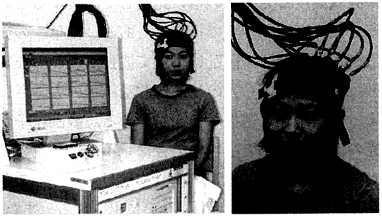


図 5　光吸収から血行動態を画像化する装置．

12 本の光ファイバー（照射側 6 本＋受光側 6 本）を所定の配置に並べて測定することで画像表示が可能になる．画像化のためには厳密には光伝播の逆問題を解く必要があるのだが，最初のステップとして光信号の変化がヘモグロビンの変化のみに起因するとしてそれらの信号値を並べたものに補間処理を施して画像とした．

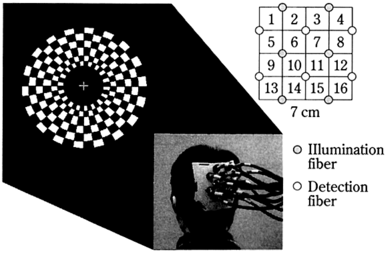


図６　チェッカーボードによる視覚刺激と後頭部の光測定.

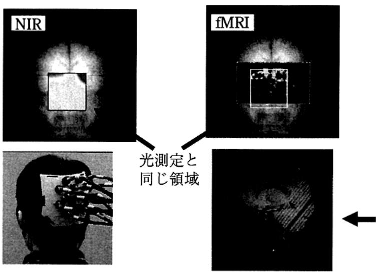


図７　光画像と fMRI 画像との比較.

8. 視覚刺激実験時の後頭部の測定

チェッカーボードによる視覚刺激時に，**図 6** に示すように光ファイバーを人の後頭部にあてて測定したデータを示す．光の測定データをヘモグロビン変化画像に変換して，さらに MRI 画像上に表示したものが**図 7** である．MRI 画像を X 線画像のように処理した画像をテンプレートとして用いている．刺激に伴って視覚野で血行動態が変化することが測定できた．

図 8 に信号解析の手順を示した．左上の図は刺激のタイミングである．この場合は 3 回のタスクを与えている．左側 2 番目の図は測定されたデータを対数変換した吸光度 (Abs: absorbance) として表示したもので，これが生のデータである．これに対してベースラインの補正を施した．それぞれのタスクの最初に相当する Abs 値を線形で結んだものである．生のデータからこのベースライン信号を引き算すると，吸光度の変化が計算できる．右上の図を見てもわかるように加算せずとも光は脳活動の様子を捕らえていることがわかる．この吸光度変化から，ヘモグロビンパラメータの変化を計算したものが右側 2 番目の図である．これを 3 回加算して右下の図を得る．これによれば，視

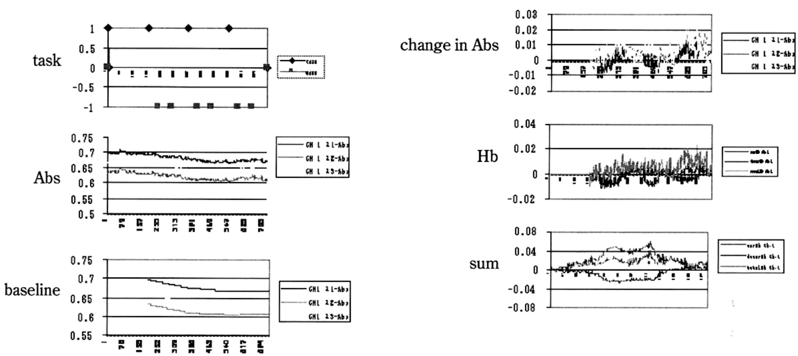


図８　信号解析.

覚刺激に伴って，oxyHb が増加し deoxyHb が減少することがわかる．このピークの値を配列して補間した後に画像にしたものが，先に示した図 **7** であった．この実験では，時間分解能は 0.5 秒としている．つまり，0.5 秒に 1 枚の画像をリアルタイムで表示することができるから，脳のダイナミックな活動を十分捕らえることができている．しかし，それぞれの照射と検出の距離を図 **6** のように設定しているため，空間分解能は実質 2.5 cm 程度と言わざるを得ない．

9. 近赤外線による光計測装置の特徴

以上で述べたように光による計測装置は，oxyHb，deoxyHb，totalHb の変化量を数センチメートルの空間分解能，1 秒以下の時間分解能で，ほぼリアルタイムに画像表示することが可能である．

光計測装置の利点としては，下記を挙げることができる．

- ともかく，簡単に測定できる．
- 被験者の近くでの計測が可能である．
- 装置の維持費，ランニングコストが極めて安く，脳波計程度である．
- 時間分解能が高い．毎秒 1 枚の Hb 画像を，リアルタイムで表示することも可能である．
- S/N がよいから，統計検定を通さずとも，画像が得られる．
- 光ファイバーさえ頭部に固定しておけば，多少動いても大丈夫である．
- ヘモグロビンの光吸収変化に基づく，血行動態変化がわかる．

一方，欠点としては下記を挙げることができる．

- ヘモグロビンの濃度と光による計測量が線形ではない．
- 拡散方程式を適用するにも，ヒトの光学特性（吸収係数，散乱係数，角度パラメータ）が確定していない．

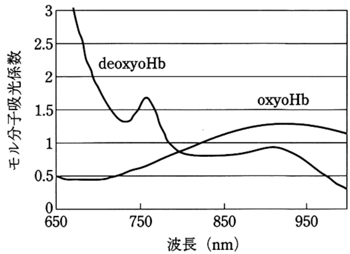


図 9 (1)　Hb の光吸収スペクトルと Abs から Hb パラメータを計算する関係式．

$$\Delta A = -\log_{10}\left(\frac{\Delta I}{I_0}\right) = \varepsilon \Delta C d$$

$$\Delta A = -\log_{e}\left(\frac{\Delta I}{I_0}\right) = \Delta \mu_a d$$

吸光度変化と濃度変化との間に線形関係を仮定

$$\begin{pmatrix} \Delta A_{\lambda 1} \\ \Delta A_{\lambda 2} \\ \vdots \\ \Delta A_{\lambda n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{oxy}(\lambda 1) & \varepsilon_{deoxy}(\lambda 1) \\ \varepsilon_{oxy}(\lambda 2) & \varepsilon_{deoxy}(\lambda 2) \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{oxy}(\lambda n) & \varepsilon_{deoxy}(\lambda n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{oxy} Hb \\ \Delta_{deoxy} Hb \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

吸光度変化　　濃度変化
Abs　　Hb
行列形式　$A = KH$
一般逆行列　$H = \left(\left(K^t \cdot K\right)^{-1}\right) \cdot K^t \cdot A$

図 9 (2)　Hb パラメータの計算式．

- 高い空間分解能は望めない．
- 深さ方向の分解が難しい．
- 簡単に測定できる反面，「本当に測定できているのか」S/N などの検討が必要．

第一に挙げたものは根本的な問題である．図 **9** に示したように，吸光度からヘモグロビンパラメータを計算する際に，ヘモグロビンの吸収スペクトル値の一般化逆行列を係数として使う．これは，



図10　頭部構造が光伝播に影響する．

もともとヘモグロビン濃度変化と測定値の変化との線形関係を前提にしているのであるが，拡散方程式の解はそれが線形でないことを教えてくれる．つまり，吸光度変化を計算するときのレファレンスとされる，スタート時の等価散乱係数と吸収係数の値によって，ヘモグロビン濃度と測定値とを線形近似した係数の傾きが異なるのである．この傾きは光路長ファクターと呼ばれるものに相当するもので，測定の最初あるいは最中であってもこの傾きの値が同じかどうかチェックする必要がある．人の頭部で散乱と吸収を決めるのは頭蓋骨などの構造であるから，ヘモグロビン変化を示す「機能画像」が，図**10**のような頭部「構造画像」に影響を受けることを示唆している．

10. おわりに
——光計測を有効に使う脳研究は何か

近赤外線による光計測の利点と欠点を述べてきたが，脳研究に応用するにあたって検討すべき点が主に2点あるので列記する．

- 血行動態の情報を得たいならば，fMRIがある．また，oxyHb，deoxyHb，totalHbの定量値はfMRIでは測定できないが，これらが脳研究に必要か．
- マッピングが脳研究の主目的ならば，光装置の空間分解能で「本当に使える」のか．

一つはfMRIとの差別化であり，一つはそもそも脳研究の目的とするところに関する問いかけである．確かに，fMRIと同じデータを出すだけであるならば，光計測は必要ないだろう．また，脳研究の最終の目的が，場所さがし＝マッピングであるならば，空間分解能の高い装置を使うべきであろう．

しかし，幼児などのfMRIで測定できないケースも実際に存在する．光計測によれば母親の腕に抱かれた状態で幼児の脳を計測することもできる．また，脳を知る上で，マッピングの情報はそのほんの最初のデータに過ぎないと筆者は考える．近赤外測定装置は脳機能の測定に応用されるようになってからまだ日が浅く，その意味で未だ大きな可能性を秘めていると言える．意識やクオリアといった高次機能の問題に関しては時間的空間的に，より高度なデータ取得方法，解析方法に基づく画像が必要になるはずで，光による画像はそれに多少とも貢献できるのではないかと期待している．

（えだ・ひでお，通信総合研究所関西先端研究センター）

特　集（2001年12月号予告）

数学による物理の表現

その共進化と多様な可能性

本体 952 円

特　集（2001年10月号）

ヒッグスの謎

素粒子物理の新たなパラダイムへ

本体 952 円

編集後記

「空間」は科学，芸術（美術）の両方で論じられるテーマである．（両者における「空間」は勿論別々のものだろう．芸術と科学，20世紀は創造の才ある若者が後者に流れた，という美術評論家がいる．文字通りには受け入れ難いが気になる主張ではある．）先日「横浜トリエンナーレ」という現代美術の展覧会をひやかし気分で観に行った．科学雑誌のイラストを拡大したような壁画がある．量子情報通信の説明のようだ．作者は科学に興味があるようだが，描かれた図の真偽の程はわからない．芸術家が現代科学の具体的な内容をモチーフとして作品を創るならば，有効な方法はその内容を熟知する科学者とのコラボレーションしかないだろうと感じた．（科学者にはそんな暇はないか．）仮にコラボレーションが実現し二者の創造性が出会ったとして，例えば「空間」はその中でどんなふうに扱われるのだろう．　（平勢）

＊　　＊

“空間”と一口に言っても，哲学的な話などをはじめ，様々なイメージがあると思いますが，今回の特集では物理学に的を絞って，この中に出てくる様々な空間概念を，前線にいらっしゃる先生方にそれぞれ解説していただきましたが如何でしたでしょうか？“空間”というと，私は宇宙や大空といったような，何もない虚空のような，何か隙間のようなものを単純に思い浮かべてしまうのですが，芹生先生の記事の中には，「空間とは，自分を取り巻く人間関係や自分と周囲との近さの微妙な感覚をつかもうとする際に生まれるものなのかもしれない」といったことが書かれていて，その洞察の深さに非常に感心させられました．先生の言う“近さの微妙な感覚”というのは，あらゆるものとの見えない縁のようなものではないだろうか，と私なりにですが感じた今日この頃です．　（伊崎）

数　理　科　学　11月号

2001年11月1日発行　　発行人 森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

企画・編集スタッフ　平勢耕介・田島伸彦・伊崎修通・飯塚真一・竹田　直

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

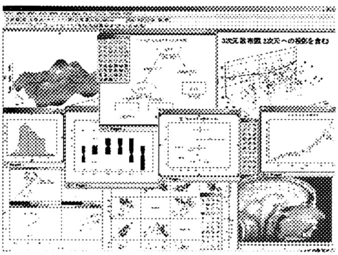
印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

■広告企画■

科学技術計算・ビジュアリゼーションソフト最前線

汎用データ解析ソフトウエア

S−PLUS



S−PLUSは高度で最新の解析手法と豊富なグラフィックスを備え、さまざまな分野で利用できる汎用のデータ解析ソフトウエアです。データの整理、加工、抽出から各種の解析、グラフ出力まで研究開発を一貫して支援いたします。世界中の数多くの研究開発機関、あるいは教育機関での導入実績を誇ります。

・2000 種類以上の高度で最新の解析手法を標準で備えています。（基本演算、行列演算、線形代数、シミュレーション、多変量解析、回帰分析、分散分析、線形モデル、医薬生物統計、検定、時系列解析、OR、ニューラルネット他）線形モデル、医薬生物統計、検定、時系列解析、OR、ニューラルネット他）

・3Dプロットを含む高品質で多種のグラフィックスを備え、グラフのカスタマイズも自由自在です。

・米国ベル研究所で開発されたオブジェクト指向データ解析言語「S」を備え、解析手法のカスタマイズや新規開発、プログラミングが手軽に行えます。

・OLEやODBCといったインターフェースを備え、他ソフトウエアとの連携動作可能な上、入出力も様々なアプリケーション、画像フォーマットに対応します。

・これらの機能を WWW 経由で利用可能にするサーバソフトウエア StatServer もございます。

・常設のトレーニングコース、強力なサポートで研究を側面支援いたします。

・Windows、Linux、主要 UNIX に対応しています。

■問い合わせ先■

株式会社数理システム

〒160-0022 東京都新宿区新宿 2-4-3
フォーシーズンビル 10F

TEL03-3358-6681　FAX03-3358-1727

E-mail:splus-info@msi.co.jp

URL:http://www.msi.co.jp/splus/

のご案内

演習分析化学
綿抜邦彦著
A5／96頁／本体1100円

本書は，初学者にも分析化学で用いるいろいろな計算ができるように初歩の計算から導入した．また，分析値の意味を理解し，正しい表現ができることに配慮し，例題には詳しい解答をつけるなど，わかりやすい自習書となっている．

よくわかる生物学
石浦章一著
A5／約180頁／予価1600円

生物学の基礎的な事項から最新の話題までを集め，それらを図や表を多用してやさしく解説している．高等学校で生物学を履修していない学生も興味を示し，かつ，理解もできるよう配慮された構成となっている．見開き体裁・2色刷．

教養としての
コンピュータ・サイエンス
渡辺治著
B5／160頁／本体1550円

本書はソフトウェアを作成するための科学，コンピュータ・サイエンスの考え方を伝えることを目標としている．いくつかの話題を楽しく読み進められるよう工夫．大学1年生を対象とした好個のテキスト．2色刷．

形式言語とオートマトン
守屋悦朗著
A5／296頁／本体1900円

形式言語理論とオートマトン理論は，今日ではコンピュータサイエンスおよび言語学における必須の基礎理論の１つである．本書はこれらの理論について左ページに本文，右ページに補足的な図や例などを配置し，できるだけ分かりやすく解説した．

情報の表現—符号
酒井善則・石橋聡共著
A5／約170頁／予価1600円

インターネットの普及で，より重要度が増したJPEG，MPEGなどの画像・音声のデジタル化技術「情報の表現」について，それぞれの技術の基礎から解説し，国際的な標準化案までを紹介．

シェル&Perl入門
皆本晃弥・奥村浩共著
B5／約280頁／予価2950円

UNIXの主要ツールであるgrep，sed，awk，perl，bash，tcshの利用に必要な機能をできるだけコンパクトに解説．各ツールを使いこなすために避けて通れない正規表現については，例を使いできるだけ詳しく解説．2色刷．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

好評の数学テキストより(2)

フーリエ解析とその応用
洲之内源一郎著／A5／124頁／本体1480円
フーリエ解析を数学的厳密さを失わず平易に論じ，その応用として偏微分方程式の境界値問題の解法を中心に具体例を選びながら解説したテキスト．

フーリエ解析・ラプラス変換
寺田文行著／A5／112頁／本体1200円
フーリエ解析とラプラス変換を具体例や問などを豊富に用いて，各項目の見開き形式で簡潔かつわかりやすく解説．

応用解析入門
寺田文行著／A5／128頁／本体1300円
著者の数学教育における長年の経験を生かして基礎的事項をわかりやすく簡潔にまとめ，豊富な例題，問題を順序よく整理して配列したテキスト．

改訂 関数解析入門
洲之内治男著／A5／184頁／本体1800円
前著のコンパクトさや，応用に役立つ関数解析の基礎事項の明確な理解と十分な実力を養えるような構成を保ちつつ，改訂した．

数値解析入門
山本哲朗著／A5／192頁／本体1748円
基本的事項に加えて，あまり知られていない結果も盛り込み，図表や数値例も数多く挿入した．学生，技術者，研究者に好適な教科書・参考書．

数値計算
洲之内治男著／A5／152頁／本体1553円
数値計算では，誤差や収束の問題，計算の回数など実際的な問題が生じるが，本書ではそれらをどのように数学の立場で解決するかに重点をおいた．

数値計算の基礎と応用
数値解析学への入門
杉浦洋著／A5／200頁／本体1800円
数値計算をすみずみまで丁寧に解説．演習問題も多数掲載されており，理工系の読者は特におすすめのテキスト．

数理・情報系のための
代数系の基礎
寺田文行著／A5／144頁／本体1380円
近年の学生の多様化にあわせて，やさしく，かつレベルは落とさないように解説した．

位　相
静間良次著／A5／116頁／本体1340円
現代数学の基礎をなす位相について，その考え方と基礎的な事項についてやさしく，かつまた順序よく説き示した入門的テキスト．

群論入門［新訂版］
国吉秀夫著／高橋豊文改訂
A5／128頁／本体1200円
基礎となる事項と性質をわかりやすく解説した旧版に，いくつかの重要事項を追加した．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

統計学テキスト他

統計の基礎
考え方と使い方
ジョンソンほか著／西平重喜・村上征勝共訳／A5／232頁／本体1311円
身近な例を中心に図と言葉でやさしく解説した．

統計入門
和田秀三著／A5／184頁／本体1480円
講義経験の豊富な著者が，大学初年級の読者を念頭におき，統計学の本質を具体的な例題できわめてわかりやすく解説した，好個な入門テキスト．

確率統計の基礎
和田秀三著／A5／192頁／本体1480円
必須の基本事項を，例題を中心に初学者向けに解説した．パソコン利用も取り入れており，また図はすべてX–Yプロッターにより描かれている．

概説 確率統計
前園宜彦著／A5／160頁／本体1350円
例題を中心に構成され，わかりやすい解説により，データの処理など統計的センスを身に付けることができる初学者向教科・参考書．

統計解析入門
篠崎信雄著／A5／312頁／本体2200円
具体的な諸例を通して，統計学の本質に迫る入門テキスト．慶應義塾大学総合政策学部における，著者の生きた講義をもとにまとめられた．

ダイナミックシステムの統計的解析と制御
［新訂版］
赤池弘次・中川東一郎共著／A5／208頁／本体2300円
不規則変動を示すシステムの計算機制御を実現するための統計的方法を具体的にそくして解説．

多変量解析法入門
永田靖・棟近雅彦共著
A5／256頁／本体2200円
しっかりした理論を身につけるため，簡単な例を2次程度の行列でどのように解析を進めていくのかを丁寧に解説した好個の教科・参考書．

多次元尺度解析法
その有効性と問題点
林知己夫・飽戸弘共編／A5／304頁／本体3107円
豊富な具体的適用例を収録し，斯学の「道しるべ」の役割を果たす，関連研究者・学生の必携の書．

情報数学の基礎
寺田・中村・釈氏・松居共著／A5／176頁／本体1600円
基礎知識としては高等学校「数学I」のみを履修していれば理解できるよう構成された情報数学のテキスト．見開き形式．

多次元尺度解析法の実際
社会調査への応用
林知己夫・飽戸弘共編／A5／208頁／本体2300円
多次元尺度解析法の利用法を，実際の応用例に即して，理解しやすい形で解説した．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学・化学テキスト

電磁気学入門
阿部龍蔵著／A5／256頁／本体1700円
「電流」という身近な対象から説きおこした丁寧な入門書．電磁気現象のシミュレーション・プログラムを付録に掲げている．

基礎 電磁気学
永田一清編／A5／208頁／本体1600円
主として工科系の大学初年級・高専・各種学校の学生を対象とした教科書・参考書．豊富な例題・問題を独力で解き理解させることを狙っている．

振動と波動
藤原邦男著／A5／192頁／本体1845円
孤立した系での単振動の考察から始めて，連成振動，フーリエ級数，連続体における波，電磁波などの力の場での波動や物質波まで解説を進めた．

振動・波動入門
鹿児島誠一著／A5／256頁／本体2200円
高校の物理のカリキュラムにうまく接続し，また実際の教育現場の実情に沿った理工系学生向のテキスト．コンピュータ利用も積極的に取り入れた．

基礎 波動・光・熱学
永田一清編／A5／224頁／本体1700円
工科系の大学初年級および高専・各種学校等の学生のための，物理における基礎的教養料目の教科書・参考書．力学・電磁気学に続く3巻目．

光　　学
村田和美著／A5／256頁／本体2400円
古典から最近の光学にわたり系統的かつ平易に記述，光学の基礎を理解させるとともに光学の応用にも興味を抱かせるよう配慮した入門テキスト．

有機化学概説 [増訂版]
杉森彰著／A5／256頁／本体1850円
前著に，ヘテロ元素化合物，有機金属化合物，化学物質の人体や環境に与える影響等についての記述を加え，内容のさらなる充実を図った．

分析化学 [新訂版]
綿抜邦彦著／A5／152頁／本体1500円
化学を十分に理解するまでに到っていない人々にも分かり易く解説．現代的な観点から，定評ある旧版を新訂．

工学のための無機化学
山下・片山・大倉・橋本共著／A5／216頁／本体1850円
無機化学の中でも，特に工学分野に使われる内容の習得を目標に，基礎から順に解説した教科書．2色刷．

物理化学
渡辺啓著／A5／264頁／本体2200円
基礎からわかりやすく解説し，ポイントがつかめるように配慮している．理工系の大学初年級・短大・高専・各種学校等の学生を対象としている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

好評の数学演習書より（1）

演習と応用 線形代数
寺田文行・木村宣昭共著／A5／200頁／本体1700円
精選された豊富な例題と問題を通して，各項目の着実な理解と技術的な習得ができるよう工夫がこらされている．見開き構成，2色刷．

演習と応用 微分積分
寺田文行・坂田泩共著／A5／216頁／本体1700円
基本事項の解説に続き，洗練された例・問題とその詳しい解答により，大学で学ぶ微分積分をより深く理解できるよう構成されている．2色刷．

演習と応用 関数論
寺田文行・田中純一共著／A5／168頁／本体1600円
複素関数論の基礎概念を，精選された例題・問題と丁寧な解答を通して，全般にわたり着実に学習できる，学生必携の演習書．2色刷．

演習と応用 ベクトル解析
寺田文行・福田隆共著／A5／208頁／本体1700円
本書は講義中心になりがちな斯学において，より多くの練習問題をこなす学習の助けとなることを目的としている．2色刷．

演習と応用 微分方程式
寺田・坂田・曽布川共著／A5／224頁／本体1800円
問題解決法，例題・問題・くわしい解答という構成．見やすい見開き体裁，2色刷の使いやすく，わかりやすい演習書．

演習 行列・微積分
寺田文行・久保創共著／A5／224頁／本体1553円
本書は数学的素養を必要とする人々すべてを対象とし，各例題・問題が頁単位で構成され，初学者が容易に取り組めるように配慮されている．

演習 応用解析
洲之内治男・寺田文行・網屋正信・小島清史共著／A5／248頁／本体1553円
微分方程式・フーリエ解析・関数論等を比較的短い期間で修得しようとする人のための演習書．

FORTRANによる
演習 数値計算
洲之内・寺田・四条共著／A5／230頁／本体1553円
アルゴリズムの定式化，計算ステップの構成法，プログラム作成上の注意事項等に重点をおいた．

演習 確率統計
洲之内・寺田・舟根共著／A5／216頁／本体1553円
基本的かつ実用上重要な問題を精選し，それらの例題を通して①理論体系の流れの理解とともに，②基本的な計算力の養成を主眼としてまとめた．

基本演習 確率統計
和田秀三著／A5／232頁／本体1700円
大学初年級・高専などの学生向けに，理系・文系を問わず重要性を増してきている統計学を自習できるよう，基本的な問題を精選・解説．2色刷．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

好評の数学演習書より(2)

詳解演習 線形代数
水田義弘著／A5／304頁／本体2100円
大学初年度で開講される線形代数の講義を受講しながら自らその理解を深めていくことを目的として作られた演習書.

基本演習 線形代数
寺田文行・木村宣昭共著／A5／256頁／本体1700円
基本的な問題を豊富に取り入れ，わかりやすくまとめた．大学初年級を対象とし，定期試験対策にも充分に役立つように配慮した．見やすい2色刷.

線形代数演習
横井英夫・尼野一夫共著／A5／272頁／本体1845円
線形代数学を理論面だけではなく具体的に理解するための演習書．各節のはじめに基本事項や定理を整理し，具体的な例題は頁単位にまとめてある.

基本演習 微分積分
寺田文行・坂田泩共著／A5／192頁／本体1600円
大学初年級，高専等の学生を対象とし，基本的な問題を数多く取り入れ，わかり易く丁寧にまとめた．巻末の問題解答も充実している．2色刷.

解析演習
野本久夫・岸正倫共著／A5／304頁／本体1845円
本書は，解析学の基礎の適切な例題および，その解法をとりあげることにより，読者の解析学の実力をより確かなものとすることを目的としている.

詳解演習 微分積分
水田義弘著／A5／352頁／本体2200円
例題とその後にもうけた演習問題を通して大学で学ぶ微分積分がやさしく理解できる．基本的事項も詳しく説明．2色刷.

微分方程式演習
加藤義夫・三宅正武共著／A5／240頁／本体1942円
工学への応用にも配慮して書かれた演習書．要項・例題・問題とわかりやすく構成されているので，サブテキストまたは自習書として最適である.

関数論演習
藤家龍雄・岸正倫共著／A5／275頁／本体1942円
複素関数論の基本事項に関する演習書．各節の冒頭には，その節で扱う問題に必要な定義と定理を整理し，丁寧な解説と注意を付した.

代数演習
横井英夫・硲野敏博共著／A5／232頁／本体1942円
線形代数を終えた人が，抽象代数の基本概念である群・環・体やガロアの理論を豊富な例題，基礎的・具体的問題により無理なく学べるよう配慮.

集合・位相演習
篠田寿一・米澤佳己著／A5／224頁／本体1800円
高校数学の知識で十分読める演習書．自習用として用いられることも考慮して，解答・証明が丁寧に記されている.

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学関連書・演習書

熱力学の基礎
宮下精二著／A5／160頁／本体1600円
熱力学の標準的なテキスト．相転移現象などの興味深い対象を紙数を割いて詳述．磁性体の熱力学や輸送現象にも言及している．

統計力学
広池和夫著／A5／176頁／本体1748円
本書は，理工系の専門課程に学ぶ学生などを主な対象として，統計力学の理論体系をわかりやすく理解できるように書かれた入門テキスト．

量子力学［新訂版］
岡崎誠著／A5／240頁／本体1950円
長年好評を得てきた「量子力学」の新訂版．例題や図を多く配置し，初学者が短期間で使いこなし，応用できる力をつけられる教科・参考書．

物理数学の基礎
香取眞理・中野徹共著
B5／160頁／本体1900円
理工系の学部１年生を対象として，物理学や理工系の専門科目を学ぶために必要な数学をわかりやすく解説した．2色刷．

サイエンス物理学辞典
A.アイザクス編／永田一清監訳
四六／334頁／本体3300円
定評ある原書（Oxford大学出版局刊）の日本語版．簡潔な説明を特長とするコンパクトな辞典．

基礎演習　物理学
加藤正昭著／A5／256頁／本体1850円
精選された例題や問題を通して，初学者でも物理の重要な基礎概念や法則などの系統的な学習ができるよう工夫のこらされた内容構成になっている．2色刷．

演習　力学
今井功ほか共著／A5／176頁／本体1456円
力学に精通し，教育面にも関心をもつ著者陣が，初学者に斯学の本質をどうやって理解してもらうかという点に特に配慮をして編集・解説した．

演習熱力学・統計力学［新訂版］
広池和夫・田中実共著／A5／248頁／本体1850円
長い間好評を得てきた旧版を，現在の教育の事情を考慮し新訂．

演習　電磁気学
加藤正昭著／A5／232頁／本体1748円
斯学を初学者にとっつきにくいものとしている単位系の問題や，電気と磁気の相互作用の問題を，例題を解くうちに自然と習得できるよう配慮した．

演習　量子力学
岡崎誠・藤原毅夫共著／A5／216頁／本体1748円
量子力学を学ぶことは理工系の学生にとり不可欠．本書は要を得た明解な解説と精選された問題により，斯学の基礎を会得できるよう工夫を凝らした．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

基礎理論とハードウェア

情報処理システム入門
［第2版］
浦昭二・市川照久共編／A5／312頁／本体1800円
長年にわたり好評を博してきた前著の待望の改訂版．初めてコンピュータを学ぶ人や，自分のこれまでの知識を再整理しようとする人に最適．

計算機科学入門
M. A.アービブ・A. J.クフォーリ・R. N.モル共著
甘利・金谷・嶋田共訳／A5／248頁／本体2524円
オートマトンの理論，PascalとLispの入門書．論理回路，ブール代数などをわかりやすく解説した．

コンピュータサイエンスのための
離散数学
守屋悦朗著／A5／240頁／本体2400円
理論的コンピュータサイエンスの各分野で必要な斯学の中から特に基礎的事項を取り上げる．

計算論とオートマトン理論
A.サローマ著／野崎昭弘・町田元・山崎秀記・横森貴共訳／A5／352頁／本体3204円
古典的計算可能性理論，形式言語とオートマトンの理論，計算量の理論，暗号学等について解説．

オートマトン言語理論 計算論
J.E.ホップクロフト・J.D.ウルマン共著／野崎昭弘・高橋正子・町田元・山崎秀記共訳／A5／I巻：320頁，II巻：296頁／本体各2816円
入門書として高い評価を得ている書の邦訳．

言語理論とオートマトン
J.E.ホップクロフト・J.D.ウルマン共著／野崎昭弘・木村泉共訳／A5／296頁／本体2816円
言語理論，オートマトンの標準的なテキストとして定評を得ている書の翻訳版．

アルゴリズムの設計と解析
A.V.エイホ・J.E.ホップクロフト・J.D.ウルマン共著／野崎昭弘・野下浩平共訳／A5／I巻：240頁，II巻：244頁／本体各2816円
著名な著者陣が斯学の最近の成果を集成した書．

アルゴリズム入門
C言語による計算
影井清一郎著／A5／288頁／本体1800円
「手順や理屈を考える面白さ」を読書自身で感じ取ってほしい，と願いを込めて書かれている．

アルゴリズムとプログラミング技法
野崎昭弘著／A5／176頁／本体1350円
本書は，具体的な問題を通して，能率がよく応用の広いプログラム技法や改良のコツを解説したアルゴリズムの入門書である．

コンピュータ解体新書
清水忠昭・菅田一博著／A5／216頁／本体1500円
難しいと敬遠されがちなコンピュータの仕組を，やさしく，わかりやすく説明．特に図版を多用して，直観的な把握ができるように配慮した．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

Information & Computing

コンピュータと社会
田中武二著　本体 1262 円

情報の処理と活用
浦　昭二・市川照久共編著　本体 1750 円

情報処理システム入門 [第2版]
浦　昭二他編　本体 1800 円

新コンピュータ概論
野崎昭弘著　本体 1650 円

文科系のための
コンピュータ　リテラシ [第2版]
Microsoft Office による
太田忠一編／植松・草薙共著　本体 2150 円

理工系ユーザのための
Windows リテラシ
皆本晃弥・森雅生共著　本体 2200 円

Windows 環境で使う
コンピュータ　リテラシ
永井雅人著　本体 1500 円

Windows 環境で使う
コンピュータ入門
高島千鳥著　本体 1400 円

Windows 2000 環境で使う
情報リテラシ
東海林健二・永井明編　本体 2750 円

社会科学系のための
情報リテラシ [Windows 版]
竹田昌弘著　本体 1400 円

Windows 版
コンピュータ　リテラシ [基礎編]
植松康祐編著　本体 1200 円

Windows 版
コンピュータ　リテラシ [応用編]
植松康祐編著　本体 1200 円

実習　一太郎
柴田　博・室井勝子共著　本体 1450 円

実習 Excel
室井・鈴木・内田共著　本体 950 円

インターネット時代の書法と作法
筧捷彦監修／辰己丈夫著　本体 1600 円

コンピュータ解体新書
清水・菅田共著　本体 1500 円

CAD による**マイクロ・プロセッサの設計**
村岡洋一監修・石井吉彦著　本体 2200 円

情報数理入門
大矢雅則編著　本体 1880 円

情報数理の基礎
梅垣壽春著　本体 2300 円

計算機科学入門
アービブ他著／甘利俊一他訳　本体 2524 円

表示価格はすべて税抜きです

コンピュータサイエンスのための
離散数学
守屋悦朗著　本体 2400 円

アルゴリズム入門
影井清一郎著　本体 1800 円

抽象データ型とアルゴリズム
アズムーデ著／野崎監訳・仙波訳　本体 4100 円

組合せアルゴリズム
仙波一郎著　本体 2136 円

オートマトン言語理論 計算論 I, II
ホップクロフト他著／野崎昭弘他訳　本体各 2816 円

ファジイ理論とその応用
水本雅晴著　本体 3200 円

基礎暗号学 I, II
加藤正隆著　本体各 5000 円

コンパイラ I, II
エイホ他著／原田賢一訳　本体各 5600 円

マイクロコンピュータのための
コンパイラ・コンパイラ
レッヒェンベルク他著／玉井　浩訳　本体 3800 円

オペレーティングシステム設計と実装
スウィッツァ著／斉藤　靖訳　本体 3500 円

Linux／FreeBSD／Solaris で学ぶ
UNIX
皆本晃弥著　本体 2300 円

ユーザのための UNIX
鬼頭繁治著　本体 2700 円

ツールとしての UNIX
深澤良彰編著　本体 2000 円

UNIX のススメ
清水・菅田共著　本体 2200 円

QuickBASIC 入門
林・室井・鈴木共著　本体 1400 円

実習 Visual Basic
林・室井・鈴木共著　本体 1850 円

Excel VBA による
Windows プログラミング
草薙信照・青山千彰共著　本体 2000 円

Fortran 77 プログラミング
原田賢一著　本体 1650 円

改訂 FORTRAN 77
大駒誠一著　本体 1700 円

Pascal プログラミング増訂版
古郡廷治著　本体 1700 円

Pascal 入門
古郡廷治著　本体 2300 円

サイエンス社